

成長するネットワークの生態学

-その共通構造と伝搬の平均場解析に関して-

Evolutional Network Ecology

-On the common structure and a mean-field analysis for spreading-

林 幸雄*

Yukio Hayashi

Abstract: We briefly review the progressive research topics in a new field of Network Ecology, which aims to investigate the distribution of important nodes with many referential links and the relations of information flow, e.g. the common structure of connectivity, universal evolution mechanisms, and robustness or efficiency for information delivery in self-organized biological, social, and technological networks. The statistical analyses for network structure and information dynamics are very useful to discover the essential properties uncovered by the conventional regular and random graph theories. In particular, we present the mechanisms of recoverable prevalence and extinction for epidemic spreading of computer viruses via e-mails on a linearly growing network with new users.

1 はじめに

不完全な情報にも対処でき動的で自己組織的な生物系のように計算機システムを捉えた「ネットワーク生態系」は、'85年同時 Xerox Palo Alto 研究所の Huberman らが提唱した概念 [18] である。その後 '90 年代に入り、日々の仕事や生活に不可欠な情報源やコミュニケーション空間を提供する WWW の急速な進展に触発された Webology (= Information Ecologies + the World Wide Web) として、生物種の生息活動分布を類推させるアクセス頻度やリンク構造などの分布特徴が議論されてきた [35]。

一方、上記とは別に、実際の生物が何十億もかけて獲得した遺伝子や代謝系の分子生物学的ネットワーク、人工物であるインターネットや電力網、さらに社会的なメール送受信や知人関係、企業間取引などに、**驚くほど共通の構造が存在する**ことが '90 年代後半から次々と明らかにされた [2][5]。それらの自律成長ネットワークの重要箇所の分布や関係連鎖などに関する「生態系」の研究は、**マクロな経済や社会インフラの健全な運用整備から、ミクロな分子レベルの設計** (ナノ技術や新薬の開発等) に至るまで、新しいブレークスルーを引き起こす可能性

を秘めていることから、欧米では数々の主要メディアで報じられ、既に研究プロジェクトも立ち上がっている。

このような動向を踏まえて本稿では、非数値データとしてネットワーク構造に焦点をあてる。ここで扱うネットワークは、ある結合分布に従う以外はランダムに生成され、その分布特徴に起因する連結性や情報伝搬の特性、あるいは確率的なノードやリンクの故障/攻撃に対する耐性などを主に議論する。したがって、ネットワーク成長とその上を流れる情報 (許容量を越えた故障やウイルスを含む) の配置に関する 2 重のランダムさに対する統計的な性質を考えることになる。以下、「ネットワーク生態系」という比較的新しい分野の現状として、現実の多くのネットワークに共通する構造、普遍的な生成原理、その耐故障性と経済性や効率性などに関して、生物系を含めて概説する。次に、我々自身の最近の取り組みとして [14]-[17]、平均場的なマクロな状態方程式の解析からウイルスの再流行と絶滅のダイナミクスを紹介する。

2 自律成長ネットワークの特徴

本章では、現実の多くのネットワークが耐故障性のある共通の構造を持ち、それが自己組織的/自律的で普遍的な生成原理に従い、さらに情報伝達や物質輸送にとって経済的かつ効率的であることを述べる。

* 北陸先端科学技術大学院大学, 〒 923-1292 石川県能美郡辰口町旭台 1-1, Tel. 0761-51-1736, E-mail yhayashi@jaist.ac.jp,
Japan Advanced Institute of Science and Technology, 1-1 Asahidai, Tatsunokuchi, Ishikawa 923-1292, Japan

2.1 Small World と Scale-Free

過去数十年にわたって、ランダムあるいは結晶構造等の規則的なグラフ構造を前提にネットワークの研究は行われてきたが、我々の身近に存在する**現実の多くのネットワークはこれらとは異なる Small World (SW) と Scale-Free (SF) と呼ばれる特徴を共通に持つ**ことが最近わかってきた [5].

まず、SW 特性は、「ノード間の平均距離が小さい」というランダムグラフの性質と「クラスター化されている」という規則的グラフの性質を合わせ持つ [42] ものである。例えば、我々はお互いに 6 人の知人を介して結び付いており、WWW の各頁は 19 クリックのリンクで繋がっていることが知られている [2][5].

また、表 1 のように社会的関係から人工物や生物系に至るまで [2][5], SF 構造と呼ばれる [4], ベキ乗則に従う結合分布 $P(k) \sim k^{-\gamma}$, $2 < \gamma < 3$ を持ち、極端に大きな次数 (関係のリンク数) k を持つハブの存在が、性的関係 [24], 電子メールの送受信 [13][14][27][30], SARS の super-spreader [25], 癌発病に関与する p53 遺伝子 [37], 沿岸生態系のラッコ [5] などで確認されている。

一方、ネットワークの連結性に関して、SF 構造は**ランダムな故障には頑強**である (かなりの故障でも連結性を保持できる) が、**ハブへの集中的な攻撃には脆弱**である (極度に分断化される) ことが明らかにされている [1]. このような連結性 (情報伝達能力) に関する性質は、インターネットなどのライフラインをテロから防御する方法, AIDS や SARS あるいはコンピュータウィルスの感染拡大の阻止 [14], クチコミなどの蔓延性 [31], 分散電力供給の可能性 [8] 等を考える上できわめて重要となる。

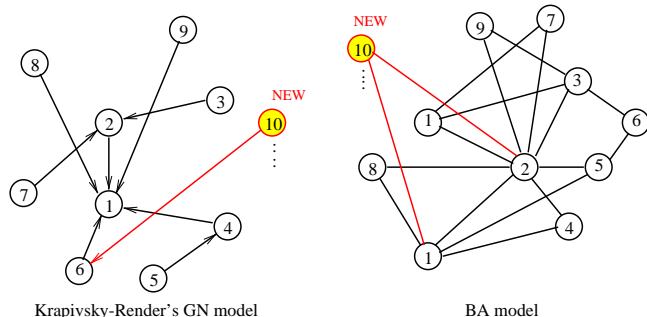


図 1: GN モデル (左) と BA (右) モデル: 番号順にノードが付け加わるとともに、その新しいノードから既存のノードに Pref. Attach. に従って m 本のリンクが張られていく。

2.2 普遍的な生成原理

WWW や企業間取引, 生物の食物連鎖や代謝系など, 全く異なる対象や要素で構成されているにもかかわらず, 現実の多くのネットワークには上記の共通性がある。このことは、ネットワークの生成過程における何か普遍的な原理の存在を予感させる。実際、SF ネットワークは以下の**単純で自然な生成原理に従う**ことが平均場解析の理論から明らかにされた [4].

Growth: 新しいノードを追加しながら、時間的にネットワークが成長していく。

Preferential Attachment: 各ノードの次数に比例して、新たなリンクが張られていく (rich-get-richer)。

これら二つの原理に従った成長ネットワークモデルとして、図 1 に示す GN モデル [21] や BA モデル [4], ベキの係数 γ を制御できる (α, β) モデル [22], 一般化 BA モデル [2] など数多く提案されている。但し、これらのモデルでは成長過程で古いノードが多くのリンクを獲得する傾向にあるが、現実は必ずしもそうではない。そこで、リンク獲得において、年齢による減衰 (図 2) や適応度 (図 3) を各ノードに与えることで、新しいノードでもハブに成り得る修正モデルも提案されている [6][12]. また、SW 特性を持つ WS モデル [42] は規則的構造に若干ランダムリンクを施すだけなので SF 構造にはならないが、逆に SF 構造の (α, β) モデルは SW 特性をも持つことがシミュレーション実験から確認されている [28].

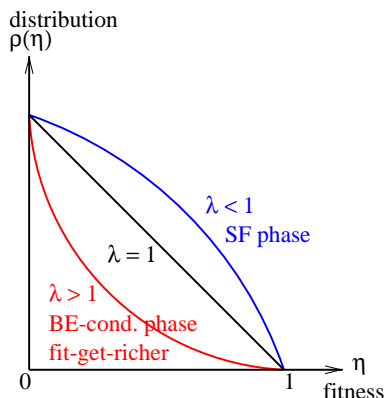


図 2: ノードの fitness η の分布 $\rho(\eta) = (1 - \eta)^\lambda$. Microsoft (株) の独占は Bose-Einstein 凝縮と同様な適応度の高い競争相手がいない状況に相当, 逆に新参者の活躍条件は $\lambda < 1$ [6].

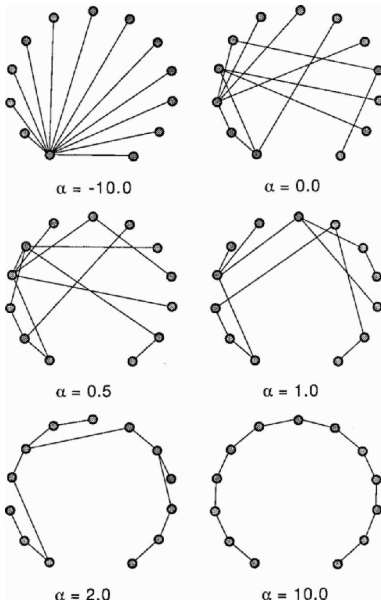


図 3: 年齢 $t - t_i$ に関する Aging 減衰 $k_i \times (t - t_i)^{-\alpha}$ に比例したリンク獲得. 古株独裁 $\alpha < 0$: 星, 臨界 (若輩活躍可) $\alpha = 1$: SF, 過老で全体不活性 $\alpha > 1$: 鎖 [12].

一方, 生物系は少し異なる生成過程を (進化の中で) 獲得したようである. それは, 図 4 に示すように, 新しいノード (黄) の追加に対して (おそらく局所近傍で) ランダムに既存のノード (青) を選択し, その選択されたノードと同じリンクを複製するというものである. その際, 全く同じ (機能に対応する) 構造にならないよう, 一部のリンクの削除や別のノードへのリンク追加を確率的に行う. 一見これらの生成過程は Pref. Attach. と異なるように思われるが, 各ノードはランダムに選ばれても, リンクの複製先となる隣接ノードとして次数の大きなハブ (緑) がより選ばれやすくなることに気づけば, 生物系は, 次数によるノード選択が不要なより単純な複製という機構で Pref. Attach. を実現しているものと考えられる.

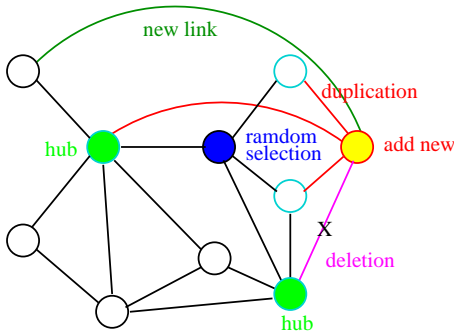


図 4: たんぱく質や遺伝子間の分子生化学的なネットワーク成長 [37]: 新しいノードと複製によるリンク追加で Pref. Attach. を実現.

2.3 経済的で通信効率も最適な構造

ネットワークにとって, 最も少ないリンク数で最も素早く情報伝達できることは望ましい. このような最適性の観点からも, SF ネットワークは都合が良い. 例えば, ランダムな構造から, それぞれ経済性 (リンク数) と通信効率 (距離) に関するペナルティ ρ と d を $0 \leq \lambda \leq 1$ で重みづけた評価関数 $E \stackrel{\text{def}}{=} \lambda d + (1 - \lambda) \rho$ を最小化するようにリンクを (隣接行列の各要素 a_{ij} を 0/1 に) 張り替えたとき, 表 2 のように両者を適度に満す場合に SF 構造が現れるという, シミュレーション結果が報告されている [10]. また, 規則的な構造から同様な最小化を行ったときも, 両者を適度に満す場合に SF 構造としてのハブが創出することが示されている [26]. 経済性と通信効率を極端に重視する場合は, 木構造と星形 (さらに強いとクリーク) 構造がそれぞれ現れ, リンク数を制限した Random Attach. と距離最小化のために中心ノードあるいは全結合への Forced Attach. が行われたものと考えられる.

有限で規則的なネットワークでは, 与えられた次数で最も効率的な構造は, (Bethe 木などの) Ramanujan グラフであることが数学では知られている [38]. しかしながら, 生物系や社会システムにおいて常に規則的な構造を保つことは困難であることから, 不均一でランダムな場合で極めて効率的な SF 構造を (結果的に) 獲得したのではないかと考えられる.

インフラ	インターネット, WWW, 航空路線, 電力網
社会的関係	知人, 企業間取引, 映画の共演, 論文引用, 電子メール送受信, 言語
生物系	神経回路網, 遺伝子や代謝反応, 食物連鎖

表 1: さまざまな対象に見られる SF 構造 [2][5].

最適基準	$\lambda = 0$ 経済性 ρ リンク数	$0 < \lambda < 1$ ミックス ← →	$\lambda = 1$ 通信効率 d 距離
Attach.	Random	Preferential	Forced
構造	Random 木	Scale-Free (ハブ創出)	Regular 星形, クリーク

表 2: SF ネットワークの最適性 [10].

3 平均場近似による感染伝搬の解析

3.1 疫学理論を覆す SF ネットワーク

今日, 電子メールを介したコンピュータウイルスや SARS などの急激な感染拡大や長期間の持続は, 我々の経済や自らの生命をも脅かすものとなっている [19][24][40]. 一方, 従来の疫学理論 [3] では, 感染率をあるしきい値以下に抑えれば感染は拡大しないものと考えられていた

が、最近、SIS(Susceptible-Infected-Susceptible) モデルに対する平均場や母関数、パーコレーションの手法 [2] などから、SF ネットワーク上では絶滅のしきい値が存在しないことが報告された [32]. すなわち、重点的なハブの免疫化がなければ [11][34]、**どんな小さな感染率でもウイルスが拡がってしまう**ことを示唆し、研究者の注目を集めた。以下、そのエッセンスを簡単に紹介する。

まず、次数 k のノードの感染密度 $\rho_k(t)$ 、感染ノードにリンクする平均確率 $\Theta(\rho(t))$ 、感染率 λ として、マクロな SIS 状態方程式

$$\frac{\partial \rho_k(t)}{\partial t} = -\rho_k(t) + \lambda k(1 - \rho_k(t))\Theta(\rho(t)),$$

を考える [32].

平衡条件 $\frac{\partial \rho_k(t)}{\partial t} = 0$ より得られた λ の関数としての $\rho_k = \frac{\lambda k \Theta}{1 + \lambda k \Theta}$ を、 $\Theta(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \frac{k P(k) \rho_k}{\sum_s s P(s)}$ に代入して、BA モデル [4] についての $P(k) = 2m^2 k^{-3}$ 、 $\langle k \rangle = \sum_s s P(s) = 2m$ を用いれば (暗黙的にネットワークサイズ $N \rightarrow \infty$)、

$$\Theta(\lambda) = m\lambda\Theta(\lambda) \int_m^\infty \frac{1}{k^3} \frac{k^2}{1 + \lambda k \Theta(\lambda)} dk, \quad (1)$$

となり、その解

$$\Theta(\lambda) = \frac{e^{-1/m\lambda}}{\lambda m} \frac{1}{1 - e^{-1/m\lambda}},$$

から、十分小さな λ に対して $\rho \sim e^{-1/m\lambda}$ となる。これは $\lambda_c = 0$ (しきい値が存在しないこと) に相当する。

あるいは、BA モデルで生成された SF ネットワークに対する SIS モデルの平衡解 $\rho_k \neq 0$ が得られて、なおかつ、先の式 (1) が $0 < \Theta \leq 1$ の解をもつには、その右辺に相当する関数の傾きが、

$$\left. \frac{d}{d\Theta} \left(\frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k P(k) \frac{\lambda k \Theta}{1 + \lambda k \Theta} \right) \right|_{\Theta=0} \geq 1,$$

を満たす必要がある [34].

よって、($\Theta = 0$ における上式の等号から) しきい値 λ_c は、

$$\frac{\sum_k k P(k) \lambda_c k}{\langle k \rangle} = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \lambda_c = 1.$$

BA モデルにおける $\langle k \rangle = 2m$ 、 $\langle k^2 \rangle = 2m^2 \ln(k_{max}/k)$ 、 $k_{max} \sim m\sqrt{N}$ より、感染が広がるしきい値は、

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \sim \frac{1}{\ln(N)} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

ここで、全ての頂点を (ランダムに) 同様な率で免疫する場合、ウイルスが絶滅する免疫率のしきい値 g_c は、

$$g_c = \sum_{k > \lambda^{-1}} \left(1 - \frac{1}{\lambda k} \right) P(k) \sim \frac{1}{3} (m\lambda)^2,$$

となって、 $\lambda \rightarrow 0$ でない限りなかなか絶滅しない (高い免疫率 $g > g_c$ が必要) .

一方、結合率に従って (ハブを重点的に) 免疫する場合、

$$g_c \sim e^{-2/m\lambda},$$

となって、広い範囲の λ で指数的に小さなしきい値が得られ、**比較的低い免疫率でも絶滅が可能**となる [34]. 但し、これらの SIS モデルの解析では、図 5 に示すような典型的に観測される再流行現象 [20][25][39] は説明できない。

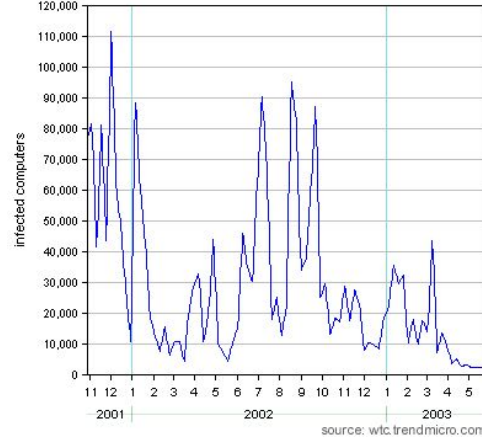


図 5: コンピュータウイルス NIMDA の感染数 [39].

これに対して、従来の伝染病の感染モデルとして知られる Kermack-McKendrick の SIR(Susceptible-Infected-Recovered) モデルは周期的なウイルス流行を表現できる [36] もの、出生率と死亡率が等しい一定の人口 (閉鎖系) を前提にやがて絶滅する挙動しか表現できず、明らかに今日の人々の接触機会やメールユーザの増加 [41] はこの前提に合致しない。そこで、人々やメールの接触関係に見られる (新たな参入を許す開放系の) SF ネットワーク [13][14][24] において、再流行現象のメカニズムを解明することが強く切望される。

我々は、SF ネットワーク上の電子メールによるウイルス感染を出来るだけ忠実に表現した確率論的モデルを考え、シミュレーションにより何度も起る再流行と絶滅の挙動を種々の条件で確かめている [14]. 次節以降では、より単純化した決定論的モデルにおける解析 [15][16] をもとに、再流行と絶滅のメカニズムを示す。

3.2 ウィルス発見のみの SIR モデルと再流行

ネットワーク成長と同時進行する SIR 状態遷移に基づいて、次数 k ごとの未感染数 S_k 、感染数 I_k 、免疫数 R_k に関する以下のマクロな方程式 [29] を考える。

$$\frac{dS_k}{dt} = -b k S_k(t) \Theta_k(t) + a_k, \quad (2)$$

$$\frac{dI_k}{dt} = bkS_k(t)\Theta_k(t) - \delta_0 I_k(t), \quad (3)$$

ここで、ネットワーク成長度 $a_k = Ak^{-\nu}$, $A > 0$, $\nu > 2$, 感染率 $0 < b < 1$, ウィルスの発見率 $0 < \delta_0 < 1$, $\frac{dR_k}{dt} = \delta_0 I_k$, 次数 k の感染数 $\Theta_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_l \frac{n_{kl}}{k \times n_k} I_l$ とする (平均場近似では Θ_k は $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_l c_l I_l$, $c_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(k-1)P(k)}{\langle k \rangle}$ に置き換わる). 但し, 結合相関として, $N_{kl} \sim n_{kl}t$, $n_{kl} \neq n_{lk}$, $k \times n_k = \sum_l n_{kl}$ を仮定する [21]. これまで, 全てのモデルや観測データで結合相関の存在が確認されているわけではない [33] が, 結合相関を考慮することは少なくとも定量的には意義がある [7][9][21].

さらに, $N_k = S_k + I_k + R_k$ より, $\frac{dN_k}{dt} = a_k$, すなわち, $N_k(t) = N_k(0) + a_k t \sim a_k t$ となり, 成長過程で常に「べき乗分布」が保持される. また, このような線形成長 $N(t) = \sum_k N_k(t) \sim (\sum_k a_k)t$ は (ミクロな過程で暗黙的に実行される) Pref. Atacch. と矛盾しない [21] ことに注意しよう.

さて, $\exists I_l^*$: const. ($l \neq k$) の断面で式 (2)(3) の平衡点の近傍の挙動を調べる. nullclines $\frac{dS_k}{dt} = \frac{dI_k}{dt} = 0$ より, $I_k^* = \frac{a_k}{\delta_0}$, また $\frac{dS_k}{dt} = 0$ より, $S_k^* = \frac{a_k}{bk\Theta_k^*}$,

$$\exists \Theta_k^* = \sum_l \frac{n_{kl}}{k \times n_k} I_l^* = \frac{A \sum_l n_{kl} l^{-\nu}}{k \times n_k \delta_0},$$

となる. 一方, 平均場近似 [15] では Θ_k が Θ に置き換わり, 一般化 BA モデル [2] の $c_k = \gamma m^\gamma k^{-(\gamma+1)} \times (1-k^{-1})$ を用いて [29],

$$\exists \Theta^* = \sum_l c_l I_l^* \sim \int_m^\infty \frac{\gamma m^\gamma A k^{-(\nu+\gamma+1)}}{\delta_0} dk = \frac{A \gamma m^{-\nu}}{\delta_0 (\nu + \gamma)}.$$

よって, ウィルス発見のみの場合は, 図 6 のような減衰収束となり, $I_k^* = \frac{a_k}{\delta_0}$ から, ウィルスを絶滅させるには $a_k = 0$ として成長を止めるしかない (隔離の必要性 [25]). 同様な解析から, SIS モデルにおいてもウィルスを絶滅させるには成長を止めるしかないこと [15] がわかる. このことは逆に, ネットワーク成長によって何度も再流行が起こることを示唆している.

3.3 SF ネット上の免疫化と絶滅条件

次に, ウィルス発見のみならずノードに免疫化 (各コンピュータにアンチウィルス) も施す場合を考えよう.

$$\frac{dS_k}{dt} = -bkS_k(t)\Theta_k(t) + a_k - \delta_r S_k(t), \quad (4)$$

$$\frac{dI_k}{dt} = bkS_k(t)\Theta_k(t) - (\delta_0 + \delta_r)I_k(t), \quad (5)$$

ここで, ランダムな免疫率 $0 < \delta_r < 1$ である. また, $\frac{dR_k}{dt} = \delta_0 I_k + \delta_r (S_k + I_k)$ より, 先と同様に, 線形成長 $\frac{dN_k}{dt} = a_k$ となる.

$\exists I_l^*$: const. ($l \neq k$) を仮定して, 式 (4)(5) の平衡点の近傍の挙動を調べる. $\frac{dS_k}{dt} = \frac{dI_k}{dt} = 0$ より, $I_k^* = \frac{a_k - \delta_r S_k^*}{\delta_0 + \delta_r}$, また $\frac{dS_k}{dt} = 0$ より, $S_k^* = \frac{a_k}{\delta_r + kb\Theta_k^*}$ なので, self-consistent な $\exists \Theta_k^* > 0$ には,

$$\begin{aligned} \Theta_k^* &= \sum_l \frac{n_{kl}}{k \times n_k} I_l^* \\ &= \frac{1}{k \times n_k (\delta_0 + \delta_r)} \left\{ \sum_{l \neq k} a_l n_{kl} \left(1 - \frac{\delta_r}{\delta_r + kb\Theta_l^*} \right) + a_k n_{kk} \left(1 - \frac{\delta_r}{\delta_r + kb\Theta_k^*} \right) \right\}, \end{aligned}$$

上記の右辺を Θ_k の関数 $f(\Theta_k)$ で表記したとき,

$$\left. \frac{df}{d\Theta_k} \right|_{\Theta_k=0} = \frac{a_k b n_{kk}}{n_k \delta_r (\delta_0 + \delta_r)} > 1, \quad (6)$$

であることが必要となる. 同様の議論が平均場近似でも出来る [17]. このとき, 図 6 のような減衰収束を示す.

次に, 絶滅条件を議論する. $I_l^* = 0$ ($l \neq k$) とした断面上の nullclines を図 7 に示す. 絶滅条件は, 点 $(0, \frac{a_k}{\delta_r})$ が $S_k = \hat{S}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\delta_0 + \delta_r)n_k}{bn_{kk}}$ より下であること, すなわち,

$$\frac{a_k}{\delta_r} < \frac{(\delta_0 + \delta_r)n_k}{bn_{kk}}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \delta_r &> -\delta_0 + \sqrt{\delta_0^2 + 4a_k b \times n_{kk}/n_k}, \\ &\sim -\delta_0 + \sqrt{\delta_0^2 + 4b \times n_{kk}} \end{aligned}$$

が必要となる (平均場近似では $\frac{n_{kk}}{n_k}$ が c_k に置き換わる). 式 (7) は, 式 (6) と符号が逆転していることに注意. さらに $\delta_r < 1$ より, 絶滅のための成長度と結合相関の制限として,

$$A < \min_{k \geq m} \left\{ \frac{(1 + 2\delta_0)n_k m^\nu}{4bn_{kk}} \right\}, \quad n_{kk} < \frac{1 + 2\delta_0}{4b},$$

が導ける (重点的なハブ免疫の場合は次数 k が大きいノードを優先した $k^\tau > \delta_h k^\tau$ に比例した免疫率となるので [11], 上記より若干緩い条件となる [16]).

ウィルスの絶滅状態への収束に相当する, 式 (4)(5) の平衡点 $(0, \frac{a_1}{\delta_r}, \dots, 0, \frac{a_k}{\delta_r}, \dots)$ が漸近安定である為の十分条件は, 以下の Jacobian

$$\begin{pmatrix} \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -\delta_r & -c_{kk} & \dots & 0 & -c_{kl} & \dots \\ \dots & 0 & d_{kk} & \dots & 0 & c_{kl} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -c_{lk} & \dots & -\delta_r & -c_{ll} & \dots \\ \dots & 0 & c_{lk} & \dots & 0 & d_{ll} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

に対する Geršgorin の定理 [23] より,

$$\delta_r > \sum_l | -c_{kl} | = \frac{a_k b}{\delta_r}, \quad (8)$$

$$|d_{kk}| > \sum_{l \neq k} c_{kl}, \quad (9)$$

(その固有値の実部が負であること) を満たせばよい. ここで, $d_{kk} \stackrel{\text{def}}{=} -(\delta_0 + \delta_r) + \frac{a_k b n_{kk}}{\delta_r n_k}$, $c_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_k b n_{kl}}{\delta_r n_k}$ と表記した.

よって, 一般化 BA モデルにおいて式 (8) 右辺の最大値は $k = m$ の場合であることから, $\delta_r > \sqrt{Abm^{-\nu}}$ を得る. また, $|d_{kk}| = (\delta_0 + \delta_r) - c_{kk}$ より, 式 (9) は $\frac{a_k}{\delta_r} < \frac{\delta_0 + \delta_r}{b}$ となるので, 式 (7) と同様な計算から,

$$\delta_r > -\delta_0 + \sqrt{\delta_0^2 + 4Abm^{-\nu}},$$

$$A < \frac{(1 + 2\delta_0)m^\nu}{4b},$$

を得る. このように, ウィルス絶滅させるには免疫率 δ_r を上げるとともに, 成長度 A を下げることが条件となるが, ネットワーク全体の自律成長は止められないので, 一部の感染領域を隔離して実質的にその部分の成長を止める方策が有効となるものと考えられる.

上記の議論ではネットワークの線形成長 $N(t) \propto t$ を仮定しているが, 電子メールによるウィルス拡散におけるインターネットユーザ等の指数的な増加 [41] を考慮すると少し違った挙動となる [17].

4 おわりに

ネットワーク構造という非数値データに着目しながら, 経済, 社会インフラ, 生物に共通したネットワークの「生態系」に関する最近の研究トピックスとして, ベキ乗の結合分布に従う SF 構造, その普遍的な生成原理, 耐故障性や経済的かつ効率的な通信特性を紹介した. また例として, 電子メールの送受信関係を表す SF ネットワークを考え, 電子メールによるコンピュータウィルスの拡散で典型的に観測される再流行現象と (その対策を講じる上での) 絶滅のメカニズムを, 平均場的なマクロな状態方程式の解析から示した.

従来のグラフ理論では扱えなかった上記の特徴が統計物理的なアプローチなどによって次々と明らかとなったのを契機に [1][4][42], 欧米で「ネットワーク生態系」の分野が活発になってきたのはわずか数年前のことであるが, その進捗は目まぐるしい [2][5]. 新しい分野であるからこそ, まだまだ本質的な部分に研究課題があるばかりか, インターネットや電力網などのインフラ技術のみならず, 社会システムから生物系に至るまで幅広い応用の可能性を秘めている. 本稿では著者の力量と紙面の都合で十分に伝えきれない面が多いかと思われるが, この新たな挑戦分野に対する日本における理解者が少しでも増えることを願ってやまない.

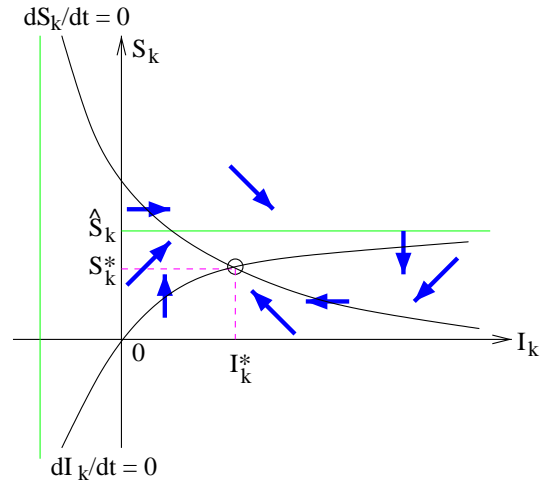


図 6: ウィルスの再流行に相当する減衰振動.

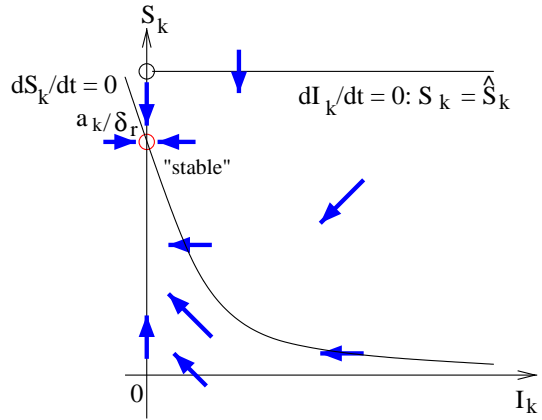


図 7: 絶滅状態への収束.

参考文献

- [1] R. Albert, H. Jeong, and A.-L. Barabási. “Error and attack tolerance of complex networks,” *nature*, vol.406, pp.378-382, 2000.
- [2] R. Albert, and A.-L. Barabási. “Statistical Mechanics of Complex Networks,” arXiv:cond-mat/0106096v1, 2001.
- [3] R.M. Anderson, and R.M. May. *Infectious Diseases of Humans*, Oxford University Press, 1992.
- [4] A.-L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong. “Mean-field theory for scale-free random networks,” *Physica A*, vol.272, pp.173-187, 1999.
- [5] A.-L. Barabási. *LINKED*, Perseus Publishing, 2002.

- [6] G. Bianconi, and A.-L. Barabási. “Bose-Einstein Condensation in Complex Networks,” *Physical Review Letters*, Vol. 86, 5632, 2001.
- [7] M. Boguñá, and R. Pastor-Satorras. “Epidemic spreading in correlated complex networks,” *Physical Review E*, Vol. 64, 047104, 2002.
- [8] 佛明智, 林幸雄. “災害時の分散型電力供給システムの耐故障性,” *電気学会全大講演論文集*, 第6分冊 電力システム, pp. 76-77, 2003.
- [9] D.S. Callaway et al. “Are randomly grown graphs really random?,” *Physical Review E*, Vol. 64, 041902, 2001.
- [10] R.F.i Cancho, and R.V. Solé. “Optimization in complex networks,” *SFI working paper*, 01-11-068, 2001.
- [11] Z. Dezsö, and A.L. Barabási. “Halting viruses in scale-free networks,” *Physical Review E*, Vol. 65, 055103, 2002.
- [12] S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes, and A.N. Samukhin. “Structure of growing networks with preferential linking,” *Physical Review Letters*, Vol. 85, 4633, 2001.
- [13] H. Ebel, L.-I. Mielsch, and S. Bornholdt. “Scale-free topology of e-mail networks,” *Physical Review E*, Vol. 66, 035103(R), 2002.
- [14] 林幸雄, 箕浦正人, 松久保潤. “ネットワーク成長によるメール型ウィルスの再流行と重点的なハブの免疫化の効果,” *情報処理学会論文誌 数理モデル化と応用*, 掲載予定, 2003.
- [15] Y. Hayashi, M. Minoura, and J. Matsukubo. “Recoverable prevalence in growing scale-free networks and the effective immunization,” arXiv:cond-mat/0305549, 2003.
- [16] Y. Hayashi. “Mechanisms of recoverable prevalence and extinction of viruses on linearly growing scale-free networks,” arXiv:cond-mat/0307135, 2003.
- [17] 林幸雄. “コンピュータウィルスの再流行と絶滅のメカニズム,” *日本応用数理学会 2003年度年会 予稿集*, pp. 288-289, 2003.
- [18] B.A. Huberman ed. *The Ecology of Computation*, North-Holand, 1985.
- [19] 情報処理振興事業協会. “国内におけるコンピュータウイルス被害状況調査,” 平成13年2月, 2001, 平成14年3月, 2002.
- [20] J.O. Kephart, and S.R. White. “Measuring and Modeling Computer Virus Prevalence,” *Proc. of the 1993 IEEE Comp. Soc. Symp. on Res. in Security and Privacy*, pp. 2-15, 1993.
- [21] P.L. Krapivsky, and S. Render. “Organization of growing networks,” *Physical Review E*, Vol. 63, 066123, 2001.
- [22] R. Kumar et al. “Extracting large-scale knowledge bases from the web,” *Proc. of the 25th VLDB Conf.*, pp.7-10, 1999.
- [23] P. Lancaster, and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices*, 2nd Edition, Academic Press, 1985.
- [24] F. Liljeros et al. “The web of human sexual contacts,” *Science*, Vol. 411, 907, 2001.
- [25] M. Lipsitch et al. “Transmission Dynamics and Control of Severe Acute Respiratory Syndrome,” *Scienceexpress*, Report, 23 May 2003. <http://www.sciencemag.org/cgi/rapidpdf/1086616v1.pdf>
- [26] N. Mathias, and V. Gopal. “Small worlds: how and why,” *Physical Review E*, Vol. 63, 021117, 2001.
- [27] 三上 俊治. “日本人とインターネット生活-ワールドインターネットプロジェクト-,” 2001. <http://sophy.asaka.toyo.ac.jp/users/mikami/info&media/>
- [28] 箕浦正人, 林幸雄. “さまざまなネットワークにおける情報伝播と構造の特徴,” *電気関係学会北陸支部連合大会*, 講演論文集 C-49, pp. 185, 2002.
- [29] Y. Moreno, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani. “Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks,” *Euro. Phys. J.*, Vol. 26, 521, 2002.
- [30] M.E.J. Newman, S. Forrest, and J. Balthrop. “Email networks and the spread of computer viruses,” *Physical Review E*, Vol. 66, 035101, 2002.

- [31] 大久保 和彦, 林 幸雄, 蜷川 繁. “Web 的ネットワークにおける情報伝搬率と速度,” *信学論 D-I*, Vol.J85-D-I, No.2, pp. 241-244, 2002.
- [32] R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani. “Epidemic dynamics and epidemic states in complex networks,” *Physical Review E*, Vol. 63, 066117, 2001.
- [33] R. Pastor-Satorras, A. Vázquez, and A. Vespignani. “Dynamical and Correlation Properties of the Internet,” *Physical Review Letters*, Vol. 87, 258701, 2001.
- [34] R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani. “Immunization of complex networks,” *Physical Review E*, Vol. 65, 036104, 2002.
- [35] J.E. Pitkow. “Summary of WWW Characterizations,” *World Wide Web*, Vol. 2, pp. 3-13, 1999.
- [36] N. Shigesada, and K. Kawasaki. *Biological Invasions: Theory and Practice*, Oxford University Press, 1997.
- [37] R.V. Solé et al. “A model of large-scale proteome evolution,” *SFI working paper*, 01-08-041, 2001.
- [38] 砂田 利一. “離散スペクトル幾何学,” *数学の楽しみ -ラプラシアンの諸相-*, 12, pp. 67-80, 1999.
- [39] <http://www.trendmicro.com/vinfo/>
- [40] US NEWS FLASH [Tech Web 特約] 2001 年のウイルス損害額は 8 月末までに推定 107 億ドル
<http://itpro.nikkeibp.co.jp/free/ITPro/USNEWS/20010907/10/>
- [41] 通信総研, 東大社会情報研 編. **世界インターネット利用白書**, NTT 出版, 2002
- [42] D.J. Watts, and S.H. Strogatz. “Collective dynamics of small-world networks,” *nature*, 393, 440, 1998.