

近接結合を持つ ネットワークの頑健性

-母関数アプローチによるパーコレーション解析-

林 幸雄

yhayashi@jaist.ac.jp

北陸先端科学技術大学院大学

1. Introduction

日々の生活や経済活動, 物流や通信手段, 我々自身の体内メカニズムに至るまで, どれも複雑なネットワークの上で成り立っている.

例えば,

- 人や企業間の関係 : ロコミ効果, 連鎖倒産
- 自律分散システム : インターネット, 携帯電話
- バイオ技術 : 遺伝子ネットワーク, エネルギー代謝系

全く異なる対象や構成要素であるが...

⇒ 新発見はまさに世紀末に起こった!!

Six Degrees of Separation

小さな世界

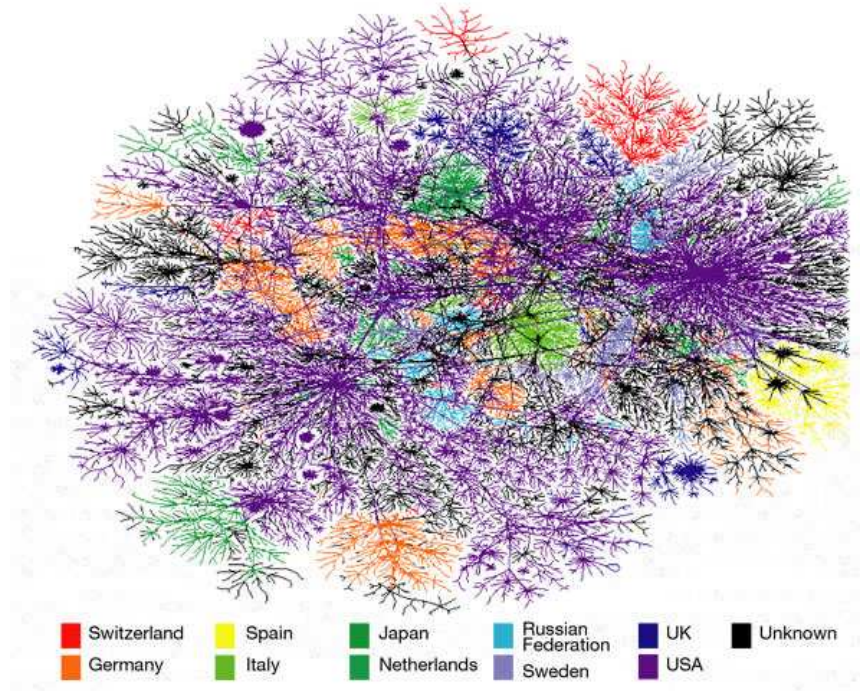
- 6人の知人, S.Milgram, Physiology Today 2, 1967.
- WWWは19クリック
 $d = 0.35 + 2 \log_{10} N$,
R.Albert et al., Nature 401, 1999.

社会関係, 人工物, 自然界など, 全く異なる対象や要素のネットワークに共通の性質がある!

むしろ例外: 階層的組織, 基盤目の都市, 物質の結晶格子等



Examples: Internet and WWW



Internet connectivity with selected backbone ISPs (CAIDA) Nature 406, 2000

<http://www.nd.edu/~networks/ppt/SanDiego.ppt/>

World Wide Web

R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabási, Nature (in press)

nodes: WWW documents
edges: URL links

800 million documents (S. Lawrence, 1999)

ROBOT: adds to its database all URL's found in a document and follows them recursively

$P_{out}(k) \sim k^{-\gamma_{out}} \quad \gamma_{out} = 2.45$

$P_{in}(k) \sim k^{-\gamma_{in}} \quad \gamma_{in} = 2.1$

(see also Huberman *et al.*, Kleinberg *et al.*, Faloutsos *et al.*)

DIAMETER OF THE WWW : 19 clicks...

Scale-free networks

現実の複雑なネットワークに共通する SF 構造

インフラ技術: 航空路線, インターネット, WWW,
電力網, 電子回路網

社会関係: 企業間取引, 知人, 映画の共演, 論文引用,
性的接触, 電子メール送受信数, 言語

生物系: 神経回路網, 遺伝子や代謝反応, 食物連鎖

べき乗則 $P(k) \sim k^{-\gamma}$, $2 < \gamma < 3$ が普遍的に存在

→ 短い経路長, 友達の友達, **ハブ攻撃への脆弱性** 等

Robustness

頑健性：ノード除去率 f に対する最大連結成分の
大きさ S , 確率的な故障に対する結合耐性
⇕

パーコレーション：ノード占有率 $q = 1 - f$ に対
する連結成分 $\langle s \rangle$

母関数：数列の一般項や漸化式, 確率的あるいは組
み合わせ的なグラフのパス数の分布などを解析する
方法論

2. Generating function

次数 k をもつノードのある確率分布 $P(k)$ に対する母関数を考えると, リンク先の1個のノードが x に対応する.

$$G_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k P(k)x^k$$

例えば, ポアソン分布 $P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ の平均値は,

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} x^k = e^{\lambda(x-1)},$$

$$\langle k \rangle = G'_0(1) = \left[\frac{d}{dx} e^{\lambda(x-1)} \right]_{x=1} = \lambda.$$

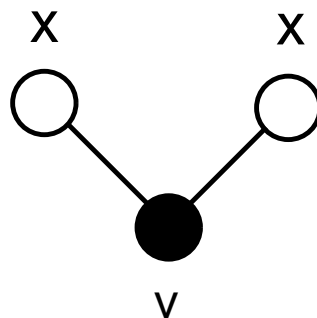
Generating function (cont.)

あるノード v に隣接する v' が次数 k である確率

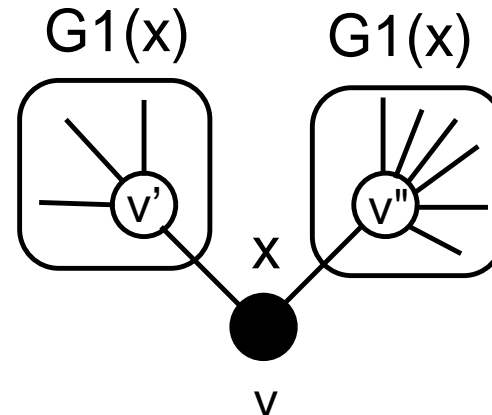
$$\frac{\sum_k k P(k) x^k}{\sum_j j P(j)} = x \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)} \stackrel{\text{def}}{=} x G_1(x).$$

∀ ノードから距離 2 のノード数 : 木上の再帰表現

$$G_0(G_1(x)) = \sum_k P(k) [G_1(x)]^k.$$



(a) 1 step



(b) 2 step

3. Cluster size

あるランダム選択リンクからのクラスタサイズ s に関する母関数 $H_1(x) = \sum \mathcal{P}_1(s)x^s$ は,

$$H_1(x) = xG_1(H_1(x)),$$

ランダム選択ノードの場合も同様に,

$$H_0(x) = xG_0(H_1(x)),$$

となる. 従って, 平均クラスタサイズは,

$$\langle s \rangle = H'_0(1) = 1 + \frac{G'_0(1)}{1 - G'_1(1)}.$$

$$N \rightarrow \infty \text{ で } \langle s \rangle \rightarrow \infty : G'_1(1) = 1 \Leftrightarrow \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle = 2.$$

Cite Percolation

占有率 q の $\forall P(k)$ における実効的な次数分布

$$\bar{P}(\bar{k}) = \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} P(k)_k C_{\bar{k}} q^{\bar{k}} (1-q)^{k-\bar{k}},$$

$$\langle \bar{k} \rangle = \sum_{\bar{k}} \bar{k} \bar{P}(\bar{k}) = \sum_n n P(n) q = \langle k \rangle q.$$

$\bar{k} = 1:$	$P(1)_1 C_1 q (1-q)^0$	$+ P(2)_2 C_1 q (1-q)^{2-1}$	$+ P(3)_3 C_1 q (1-q)^{3-1}$	$+ \dots$
$\bar{k} = 2:$		$2P(2)_2 C_2 q^2 (1-q)^0$	$+ 2P(3)_3 C_2 q^2 (1-q)^{3-2}$	$+ \dots$
$\bar{k} = 3:$			$3P(3)_3 C_3 q^3 (1-q)^0$	$+ \dots$
$+$				\vdots
	$P(1)q$	$+ 2P(2)q$	$+ 3P(3)q$	$+ \dots$

Cite Percolation (cont.)

$$\langle \bar{k}^2 \rangle = \sum_{\bar{k}} \bar{k}^2 \bar{P}(\bar{k}) = \langle k^2 \rangle q^2 + \langle k \rangle q(1 - q).$$

巨大連結成分が出来る条件式より, 臨界値 q_c は,

$$2 = \frac{\langle \bar{k}^2 \rangle}{\langle \bar{k} \rangle} = \frac{q_c(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle) + \langle k \rangle}{\langle k \rangle},$$

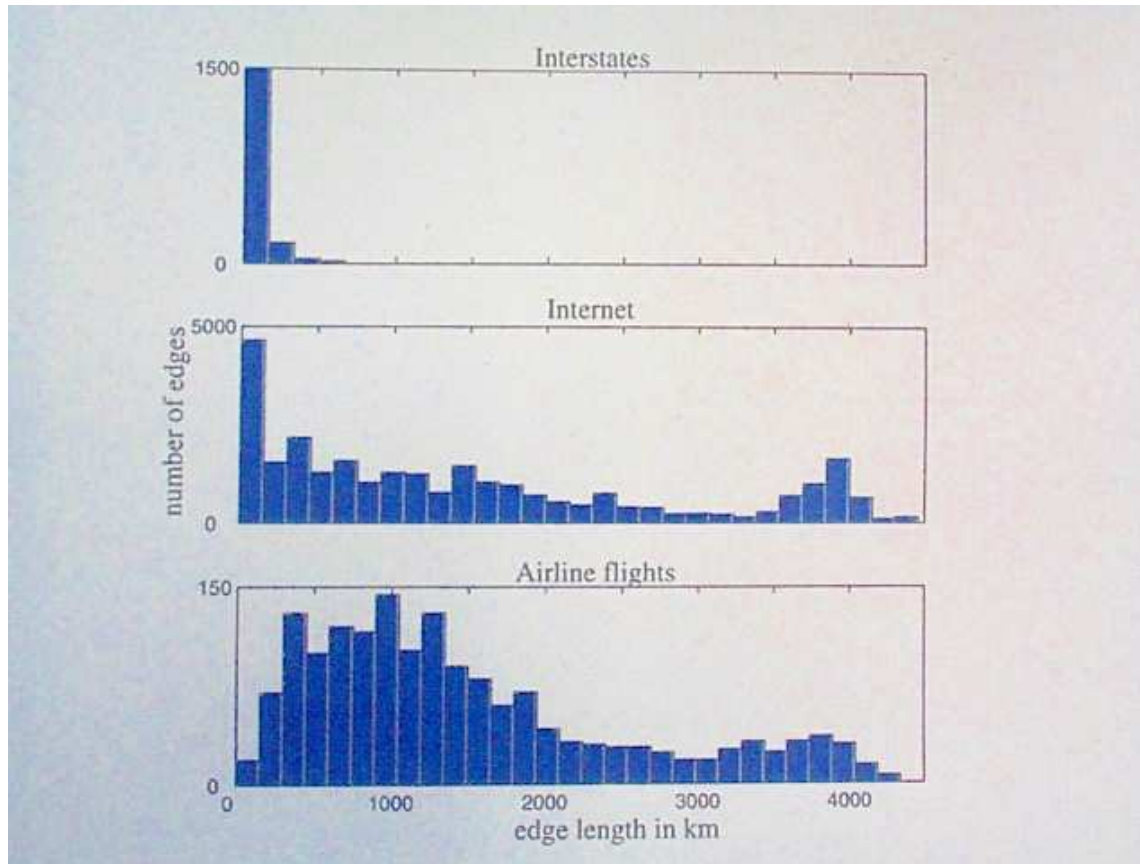
$$q_c = \frac{1}{\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle - 1}.$$

現実の SF ネットでは, べき指数は $2 < \gamma < 3$ なので,

$$\langle k^2 \rangle = \sum k^2 P(k) \sim \sum k^{2-\gamma} \rightarrow \infty, \quad q_c \rightarrow 0: \text{強結合}$$

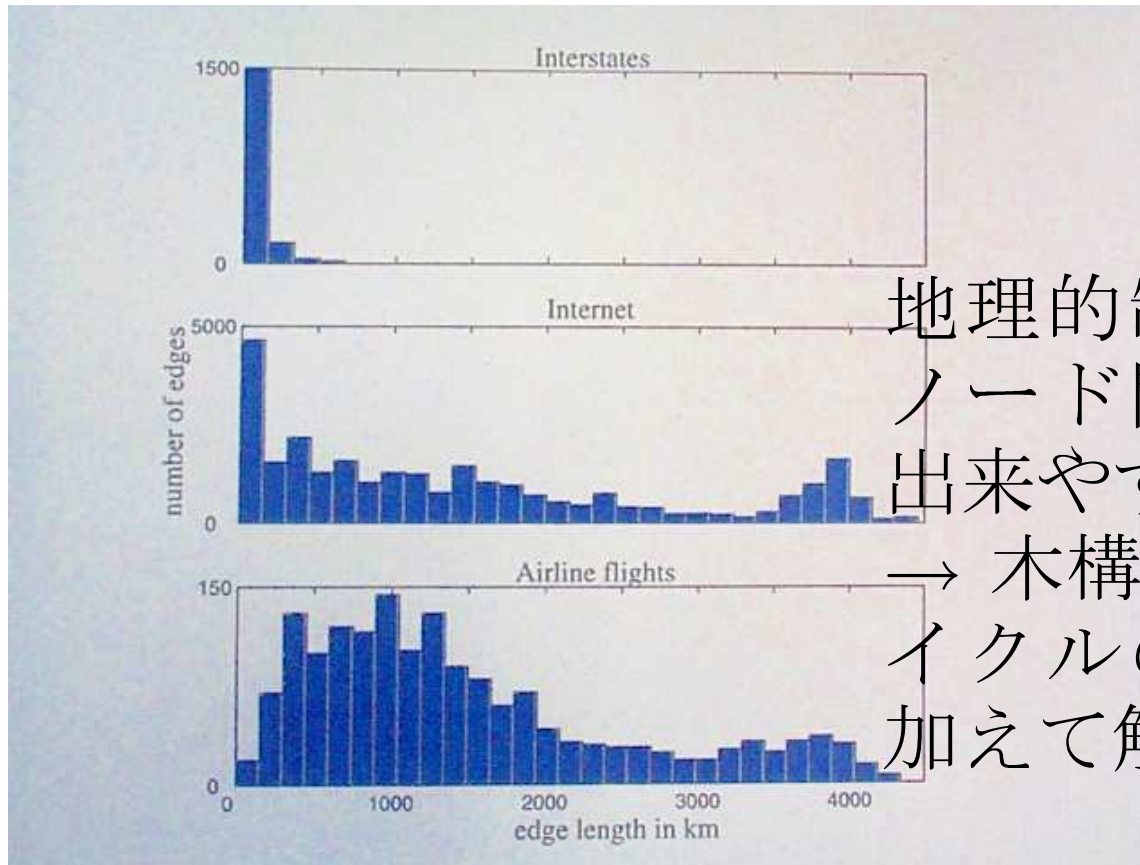
耐性 (不可避なウィルス拡散) R.Cohen et al., PRL, 2000.

4. Geographical constraints



M.T.Gastner and M.E.J.Newman,
Euro.Phys. J. B 49(2), 2006.

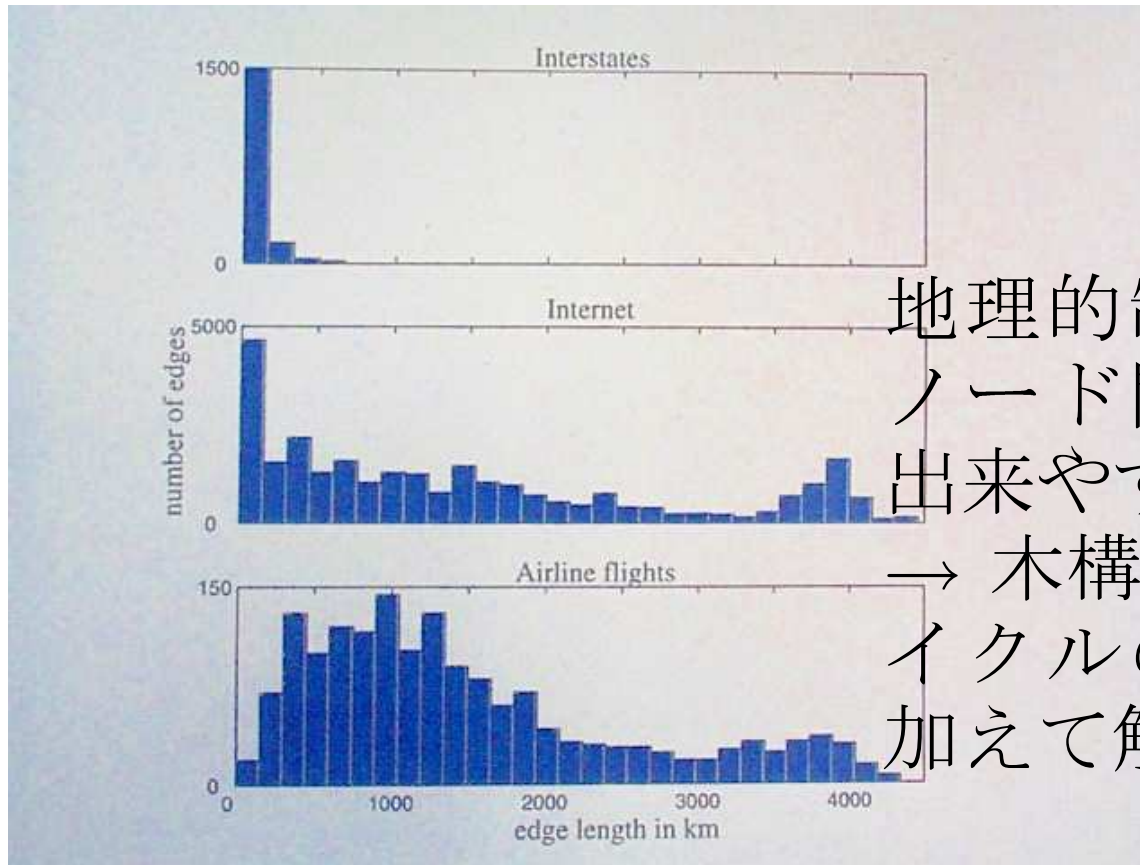
4. Geographical constraints



地理的制約により近接
ノード間のサイクルが
出来やすい
→ 木構造に長さ L のサ
イクルの独立な影響を
加えて解析を拡張

M.T.Gastner and M.E.J.Newman,
Euro.Phys. J. B 49(2), 2006.

4. Geographical constraints



地理的制約により近接ノード間のサイクルが出来やすい
→ 木構造に長さ L のサイクルの独立な影響を加えて解析を拡張

M.T.Gastner and M.E.J.Newman,
Euro.Phys. J. B 49(2), 2006.

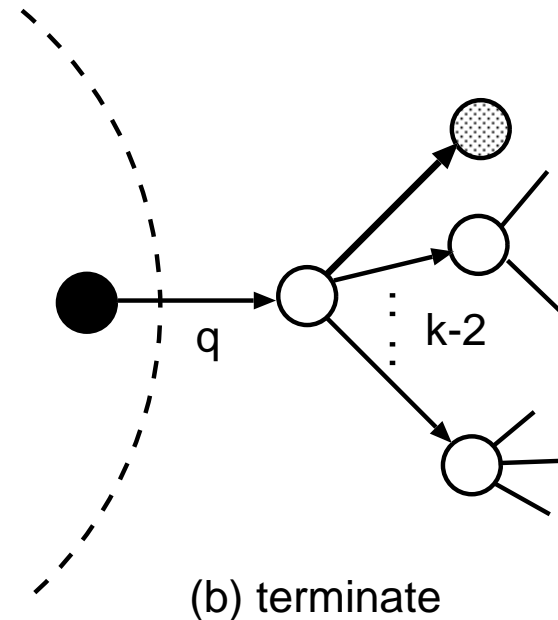
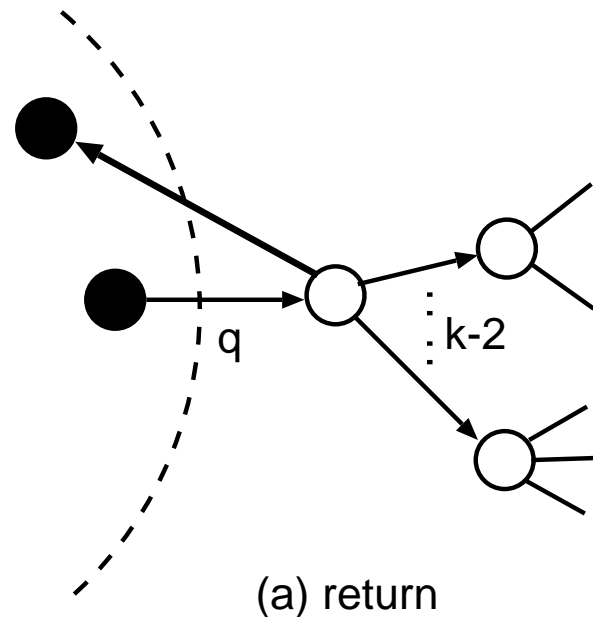
$\forall P(k)$ において, 短いサイクルの存在でより脆弱に!

Terminated Nodes

占有率 q のリンク先からの 1 本が, (a) 既知ノードに戻る又は (b) 末端の場合のクラスタサイズの母関数

$$H_1^{(1)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - F_1(1) + xF_1^{(1)}(H_1(x)),$$

$$F_1^{(1)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q}{\langle k \rangle} \sum k P(k) x^{k-2} = x^{-1} F_1(x)$$

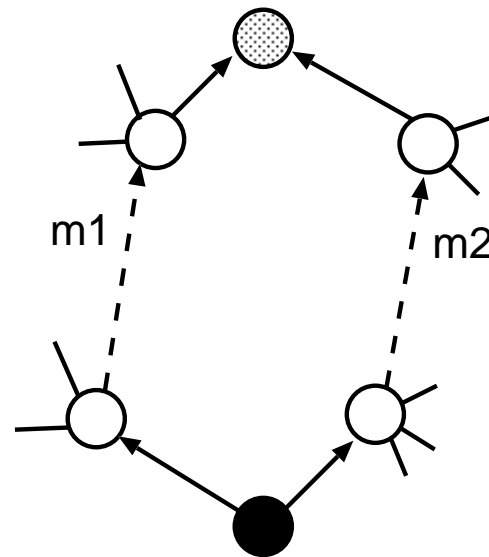


Effect of Cycles

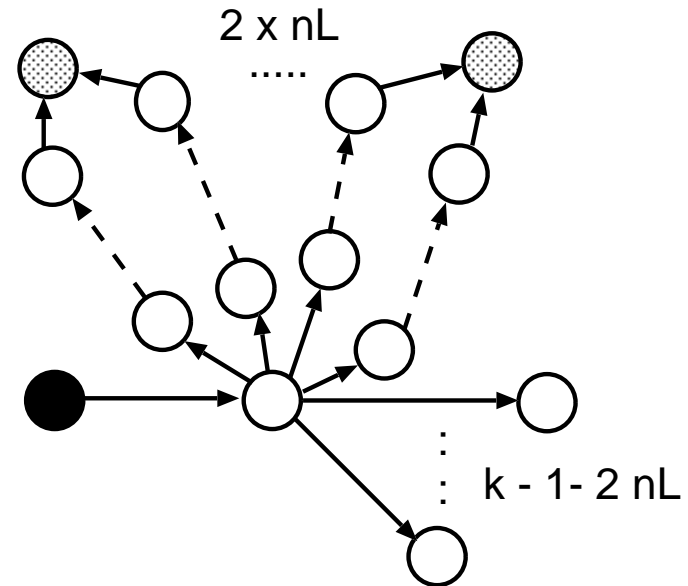
(a) あるノードからのリンクがサイクルに属する時

$$H_1^{(m_1)}(x) = 1 - F_1(1) + xF_1^{(1)}(H_1(x)) \times H_1^{(m_1-1)}(x)$$

(b) 一般に $n_L(k)$ 個の長さ L のサイクルを持つ時



(a) a cycle



(b) n_L -cycles

Effect of Cycles (cont.)

$$H_1(x) = 1 - F_1(1) + \frac{q}{\langle k \rangle} [H_1^{(m_1)}(x) H_1^{(m_2)}(x)]^{n_L(k)} \times [H_1(x)]^{k-1-2n_L(k)}$$

平均クラスタサイズ $\langle s \rangle = H_1'(1)$ は,

$$\langle s \rangle = \frac{q + \frac{2-q^{m_1}-q^{m_2}}{1-q} \frac{q^2}{\langle k \rangle} \langle kn_L(k) \rangle}{*}$$

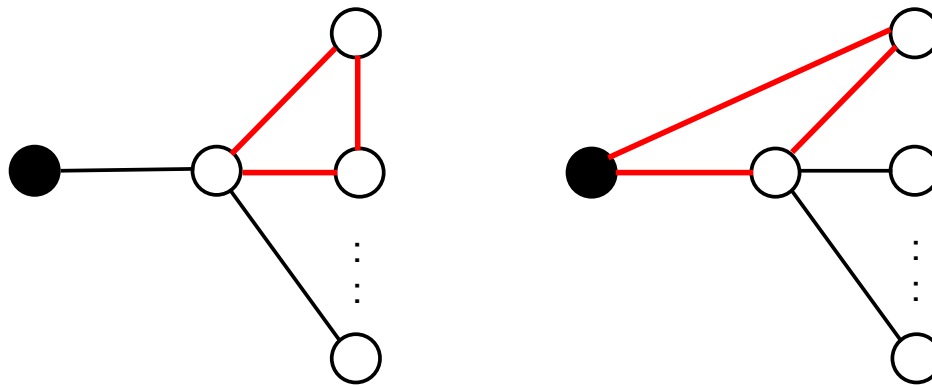
この分母*が零になる臨界値 $q_c^* =$

$$\frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1) \rangle - 2\langle kn_L(k) \rangle \left(1 - \frac{2-(q_c^*)^{m_1}-(q_c^*)^{m_2}}{2(1-q_c^*)} \frac{q_c^* \langle k(k-2) \rangle}{\langle k \rangle} \right)}$$

Effect of Triangles

特に, 長さ3のサイクル (友達の友達の三角形) の影響を考えると, $m_1 = m_2 = 1$, $C(k)$ を用いて,

$$q_c^* = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1) \rangle - \left(1 - q_c^* \frac{\langle k(k-2) \rangle}{\langle k \rangle}\right) \langle C(k) \frac{(k-1)^2}{2} \rangle}$$



理論予測: 分母がより小さくなるので $q_c^* > q$, 短いサイクルの存在で **ランダム故障に対してより脆弱!**

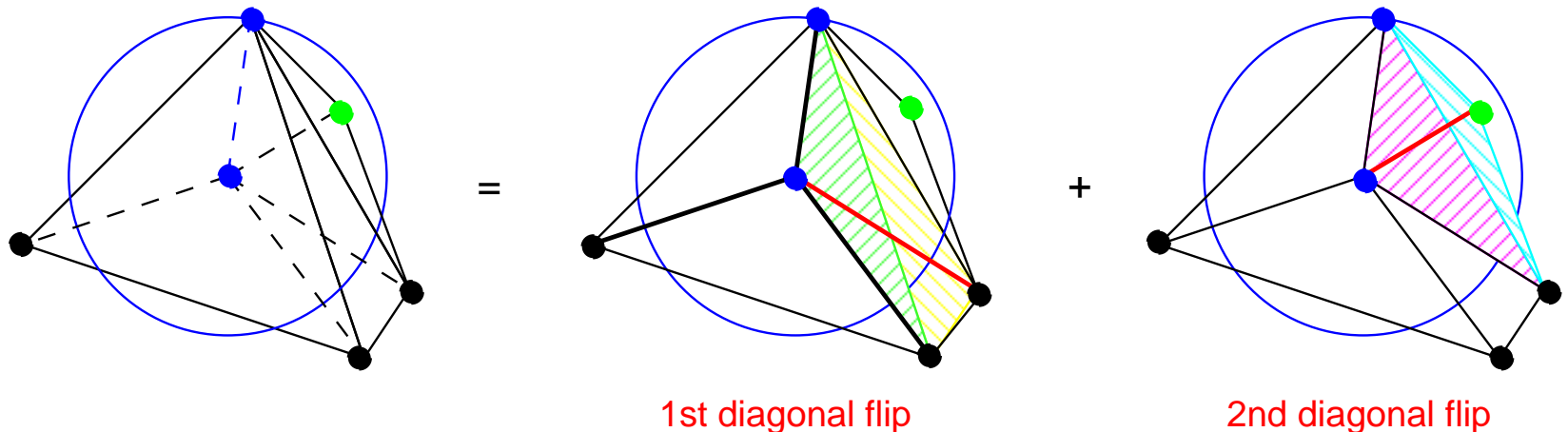
Geographical SF networks

三角分割されたある初期構成から反復的に成長

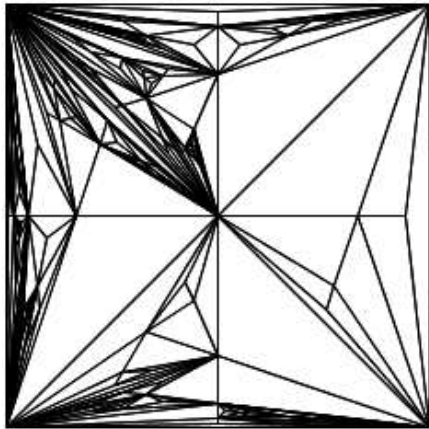
Random Apollonian: ランダム選択した三角形内に新ノードを挿入し, そこから各頂点に結合 (三角形の再分割)

Delaunay-like SF: 新ノードを中心としたある範囲内で対角変形を施す (長距離リンクの抑制)

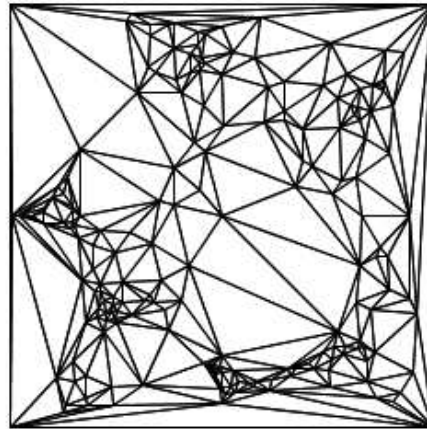
Delaunay Triangulation: 対角変形操作を全域で



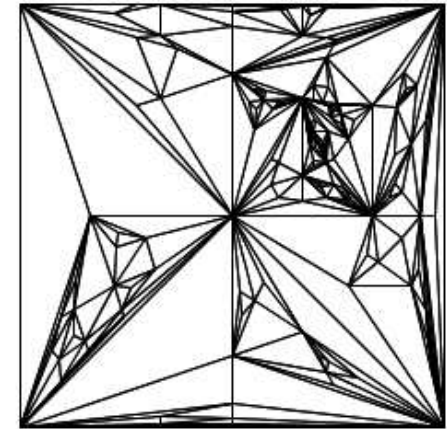
Topological Structure



RA



DT

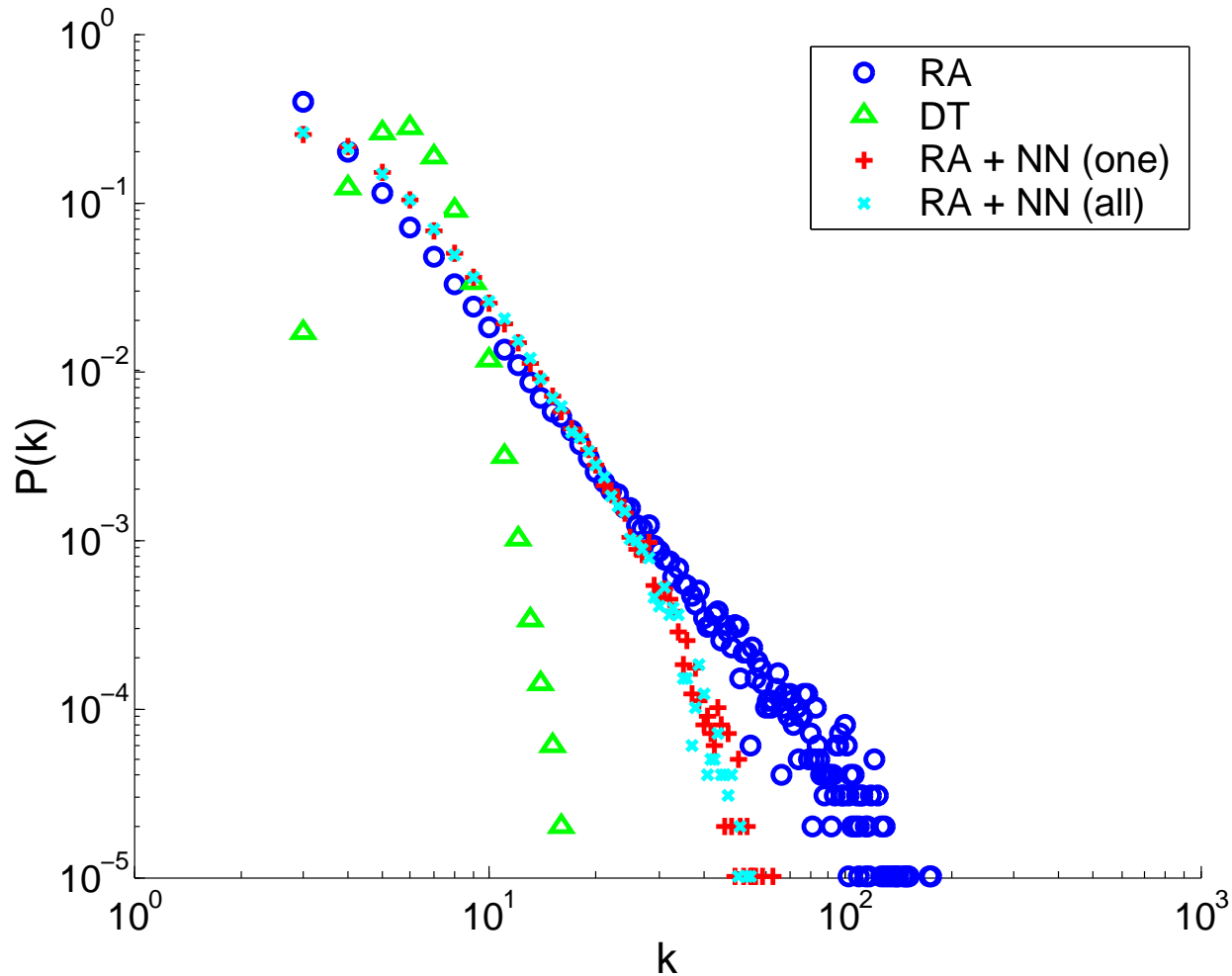


RA+NN(one)

- 4隅と中央におけるハブ的スタブ
- 人口分布のような疎密部分が自然に創出

Y.Hayashi and J.Matsukubo, PRE73, 066113, 2006.

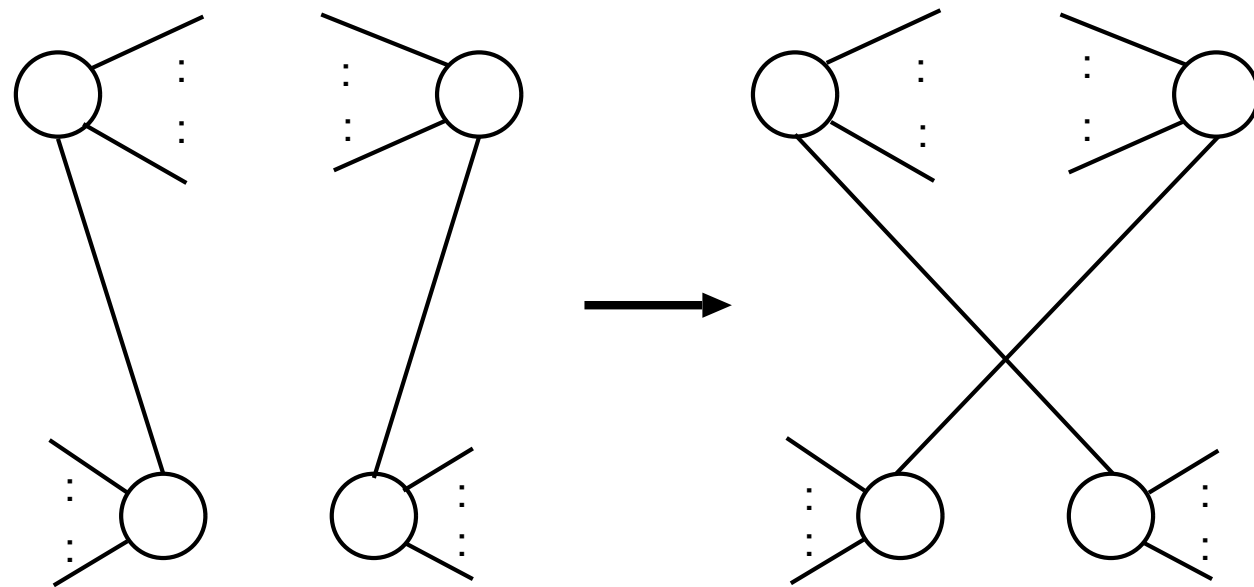
Degree Distribution



RA: power law, DT: lognormal, RA+NN: power law with exponential cutoff (the deg. of hubs are reduced)

Randomly Rewired Nets

地理的制約を無くしたネットワークとの比較：
総リンク数や次数分布を保持したまま、ランダムに
リンクを張り替える

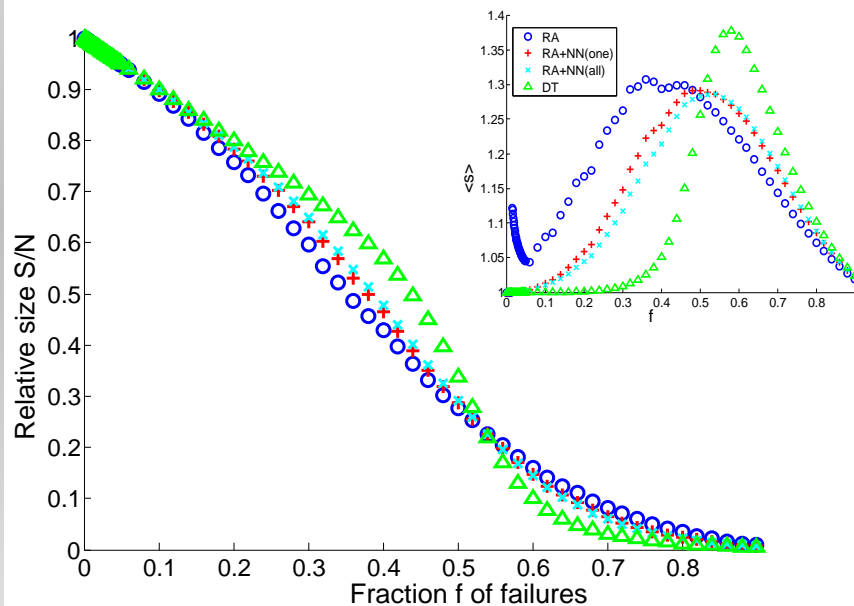


Rewiring a pair of links with the same degree at each node

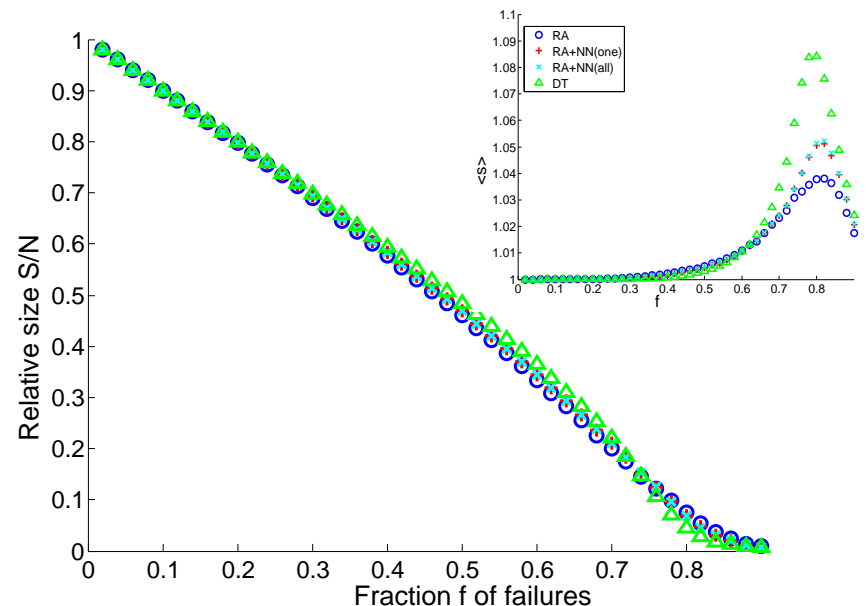
Maslov et al., Physica A 333, 2004

Tolerance to Failures

最大連結成分 GC のサイズ比 S/N
挿入図：平均クラスタサイズ $\langle s \rangle$



(a) geographical nets



(b) rewired nets

⇒ どのモデルもランダム故障には同様な頑健性

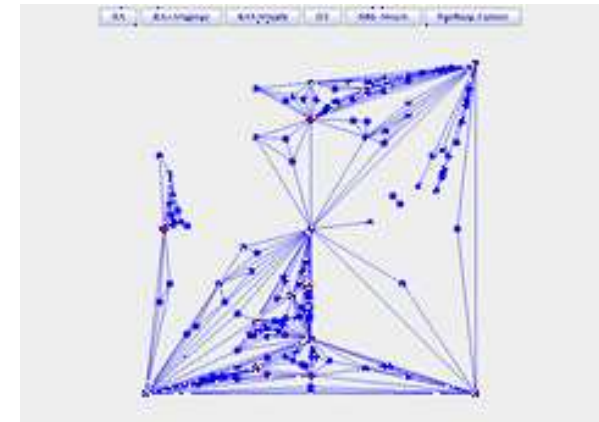
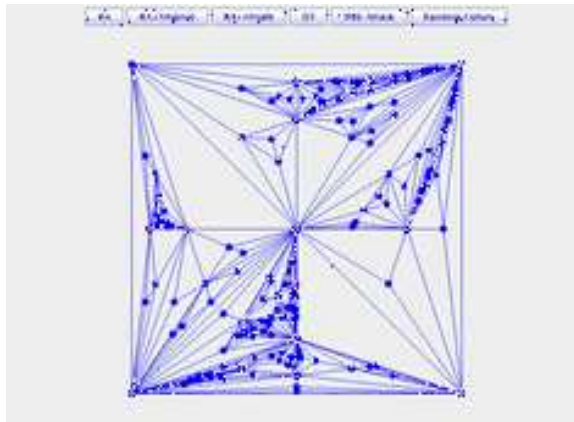
(RA: ○, DT: △, RA+NN(one): +)

Damages by Failures

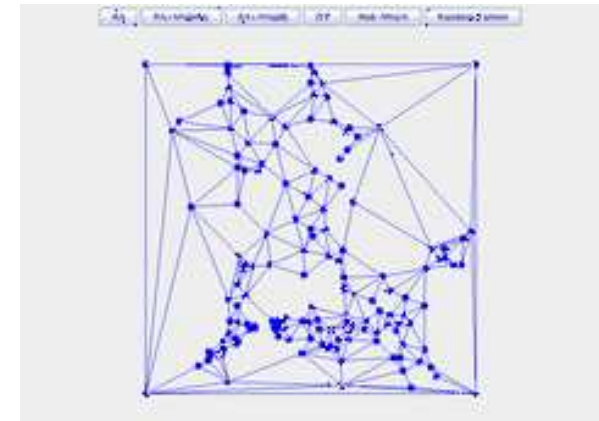
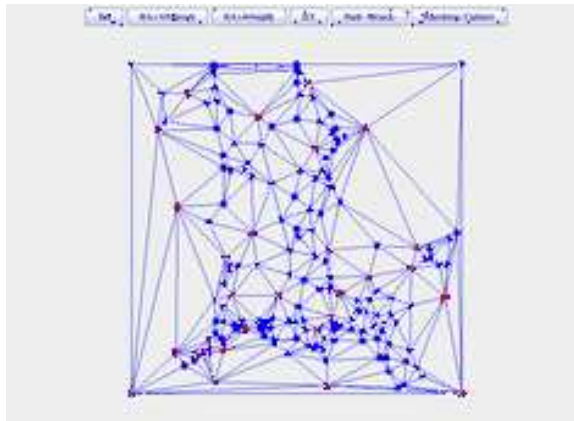
Initial N=200

randomly removed
32 nodes

RA

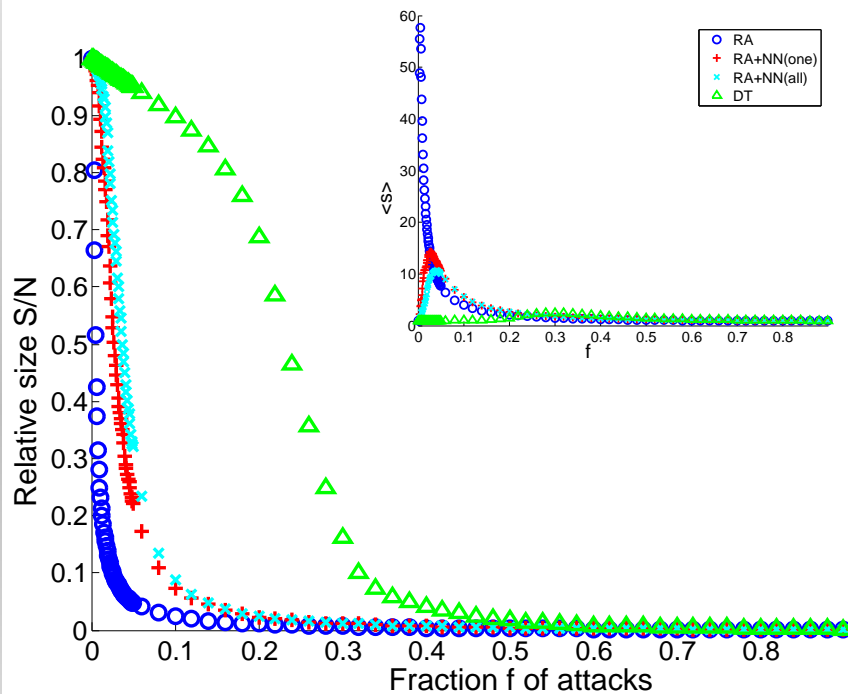


DT

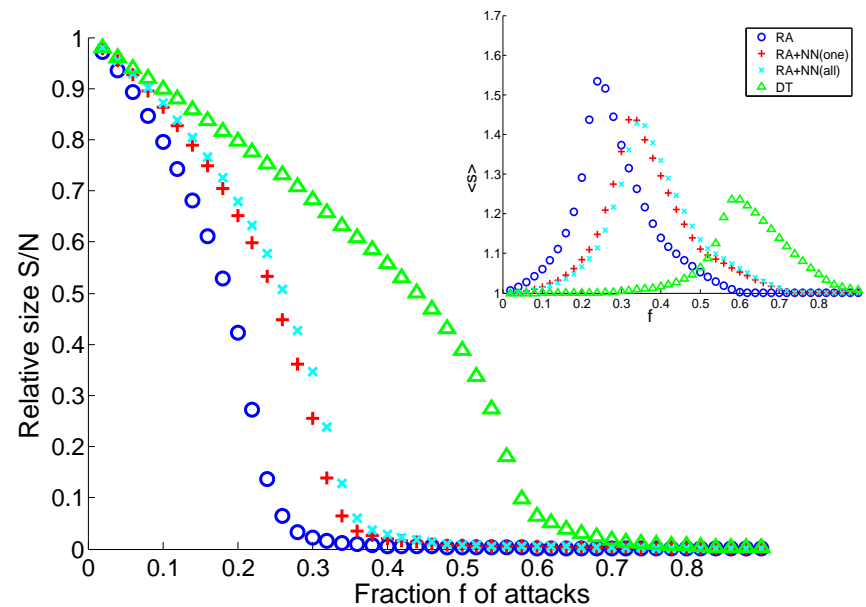


ランダム故障なら最大連結成分はしぶとく残る！

Tolerance to Attacks



(a) geographical nets



(b) rewired nets

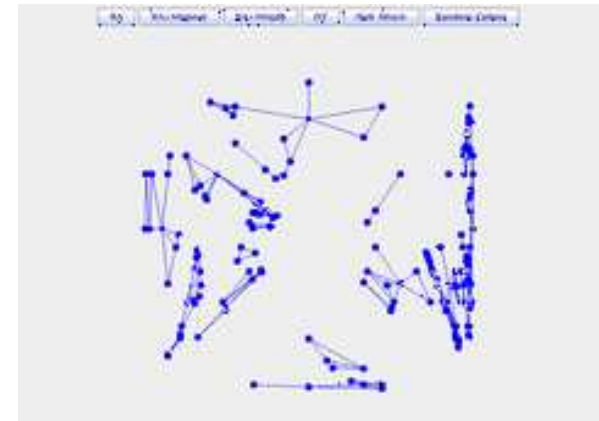
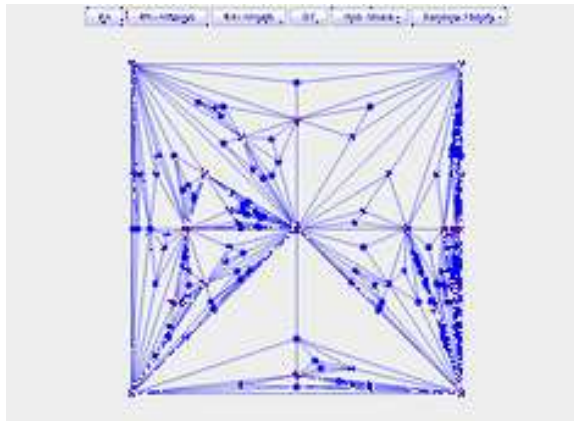
⇒ 地理的制約無は, ハブ攻撃への脆弱性を抑制

Damages by Attacks

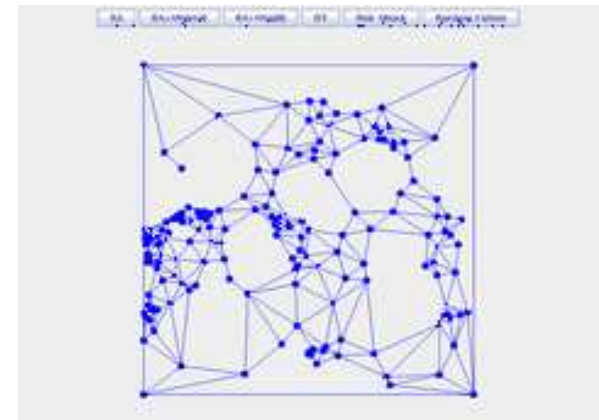
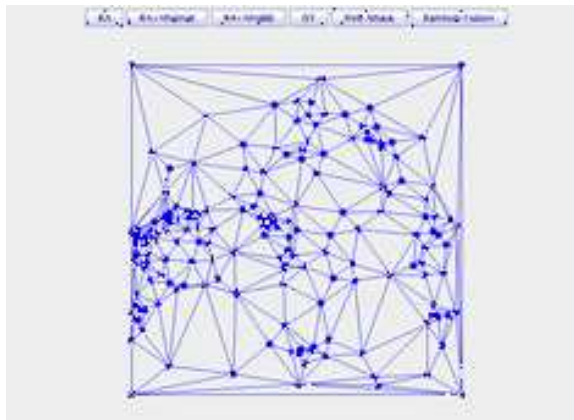
Initial N=200

targeted attacks on
16 hubs

RA



DT



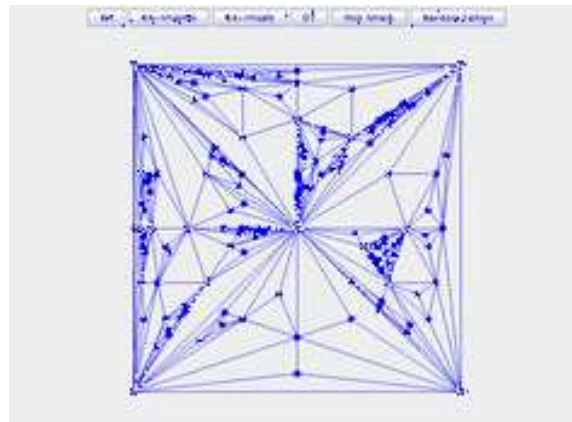
多くの孤立島に分けられ, 脆弱な RA モデル

Damages by Attacks (cont.)

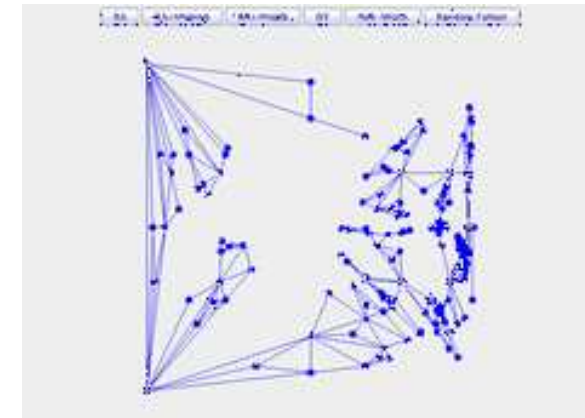
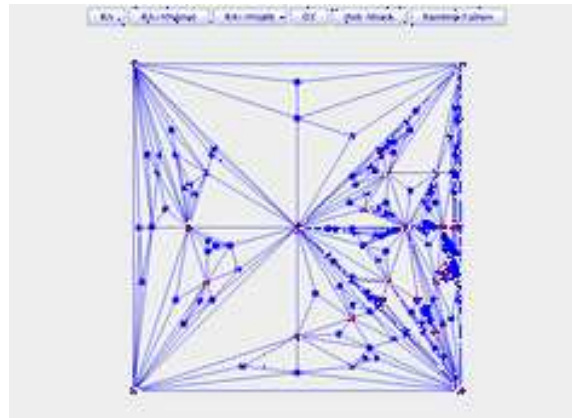
Initial N=200

targeted attacks on
16 hubs

RA+NN(one)



RA+NN(all)



極端に脆弱な RA モデルより多少改善
4隅と中央のスタブ構造が弱点

8. Summary

母関数によるネットワークの連結性の解析から

- 一般の次数分布 $P(k)$ における連結性の条件：

$$\text{占有率の臨界値 } q_c = \frac{1}{\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle - 1}$$

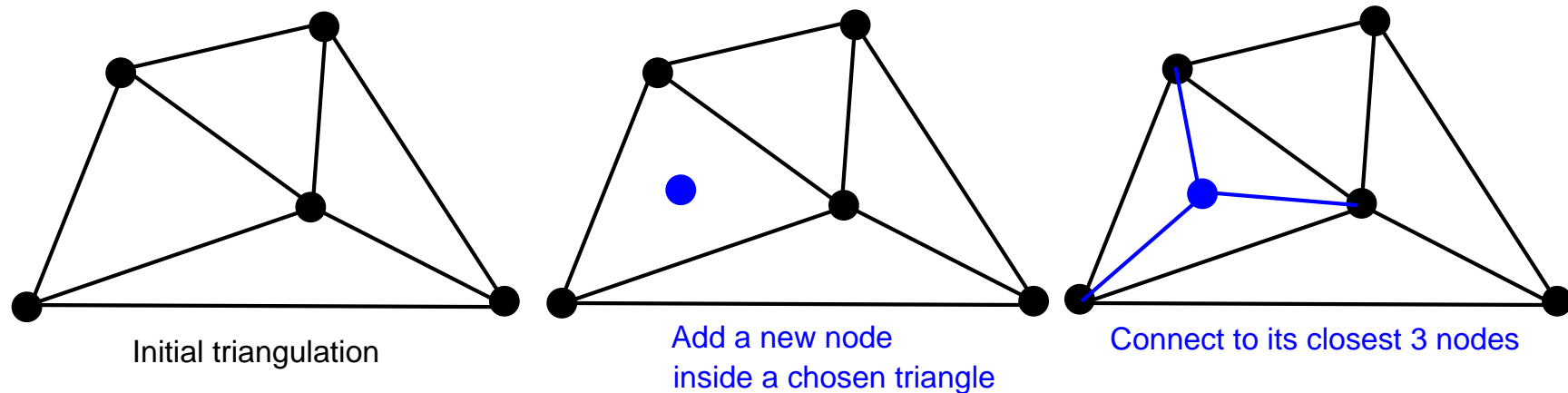
$q_c \rightarrow 0$ が, **SF ネットワークの故障耐性**

- 木構造にサイクルの影響を加えて拡張した理論予測より, **短いサイクルの存在で結合耐性が脆弱化**
- 実際, 地理的制約による三角サイクルの影響で, 結合耐性の脆弱化をシミュレーションでも確認
特に, ハブ攻撃に脆いことを示唆

次数分布の違い, 種々の制約 (複数のサイクル長)
等による影響は?

A1. Random Apollonian Net

Configuration: iterative subdivision of a randomly chosen triangle from an initial triangulation

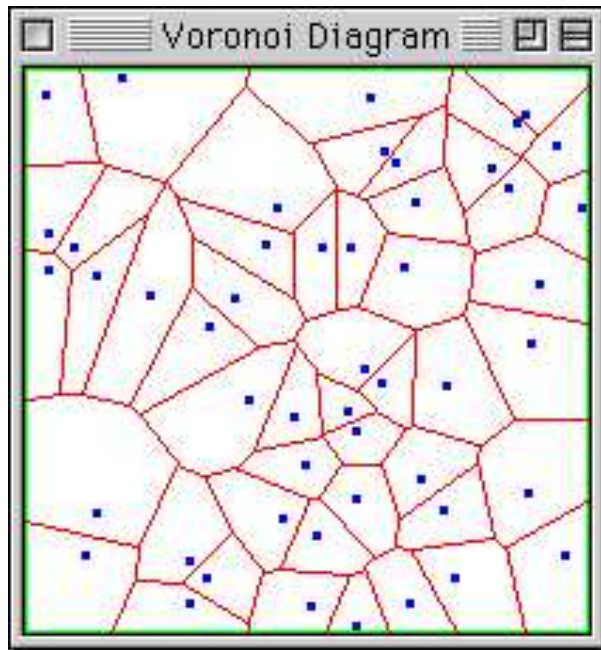


⇒ Some **long-range links naturally appear** in narrow collapsed triangles near the boundary edges

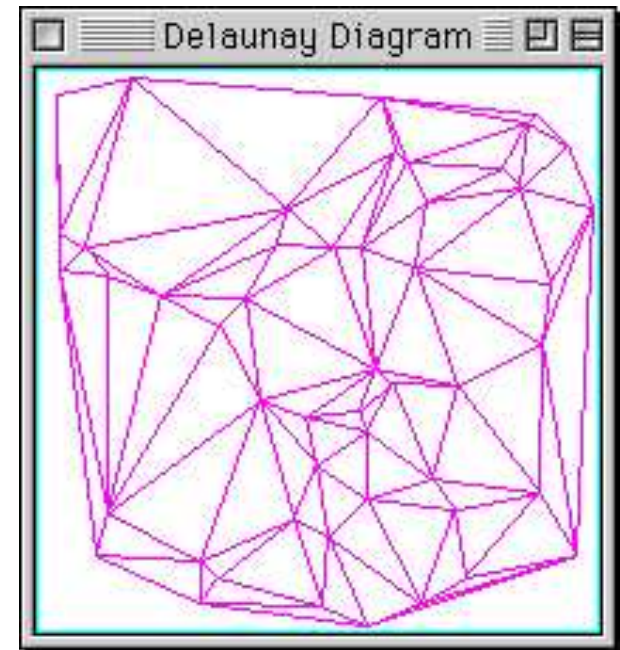
Zhou, Yan, Wang, Phys. Rev. E 71, 2005

A2. Voronoi and Delaunay

Optimal triangulation in some geometric criteria:
maximim angle, minimax circumcircle, **short path length in the same order as the direct Euclidean dist.**



→
Dual Graph
←

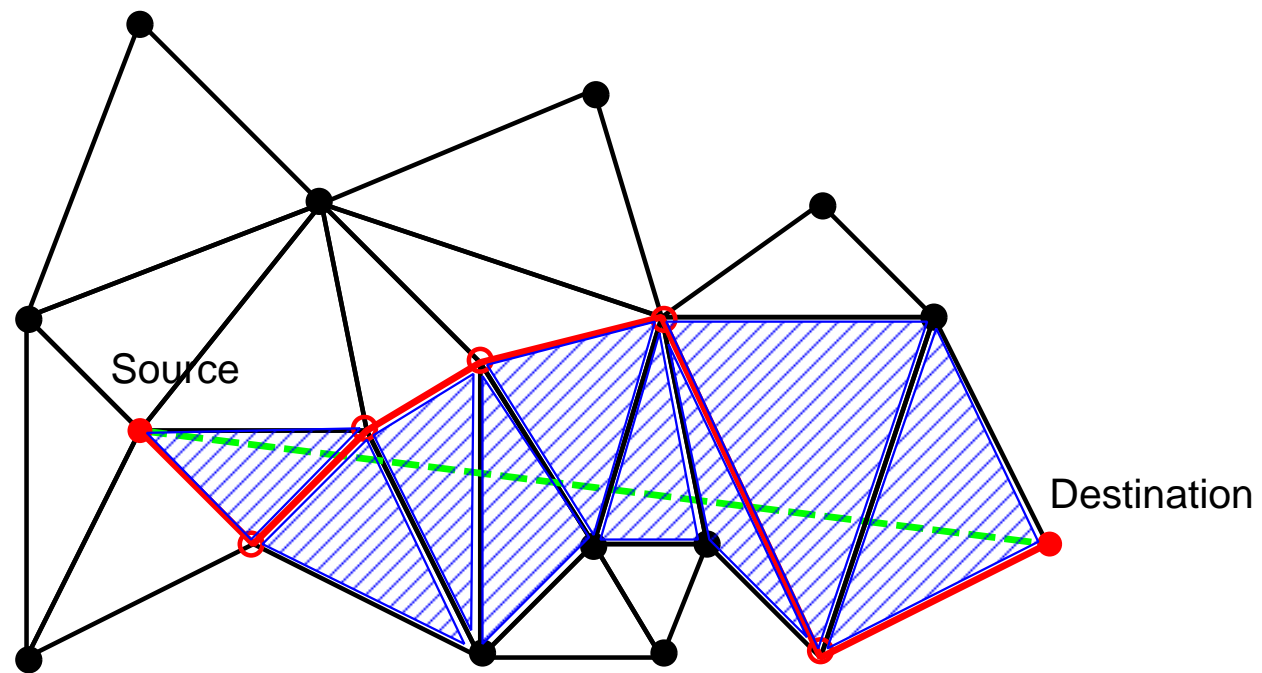


⇒ Consider the combination of RA (by triangulation on a plane) and DT **to avoid the long-range links**

A3. Efficient Routing

Planar triangulation: reasonable math. abstraction of ad hoc net. (each triangle forms a service region)

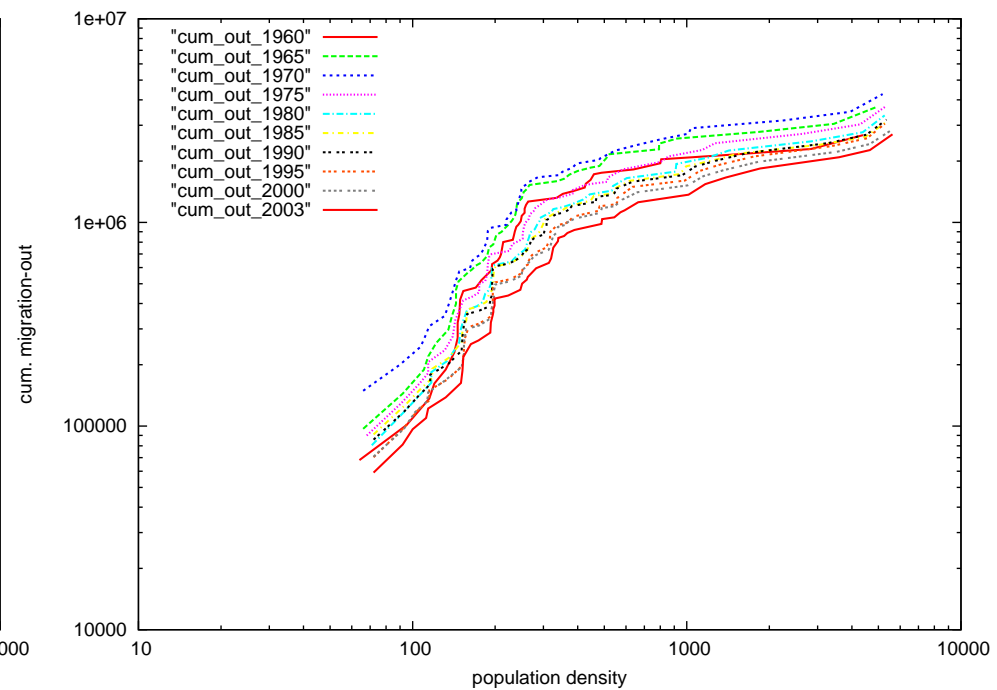
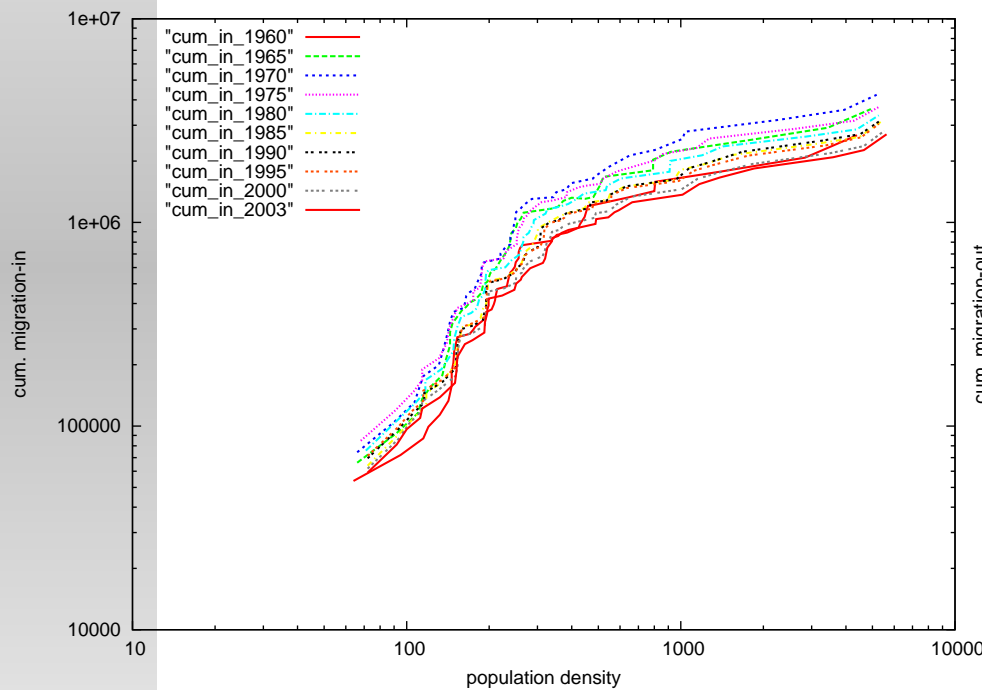
Moreover, a **memoryless, no defeat, and competitive** online routing algorithm has been developed for such networks taking into account the face.



Bose and Morin, SIAM J. of Comp. 33(4), 2004

A4. Dense-get-denser

Migration-in/out versus population density of Japanese prefectures in each year



A5. Classes of Geo. SF Nets

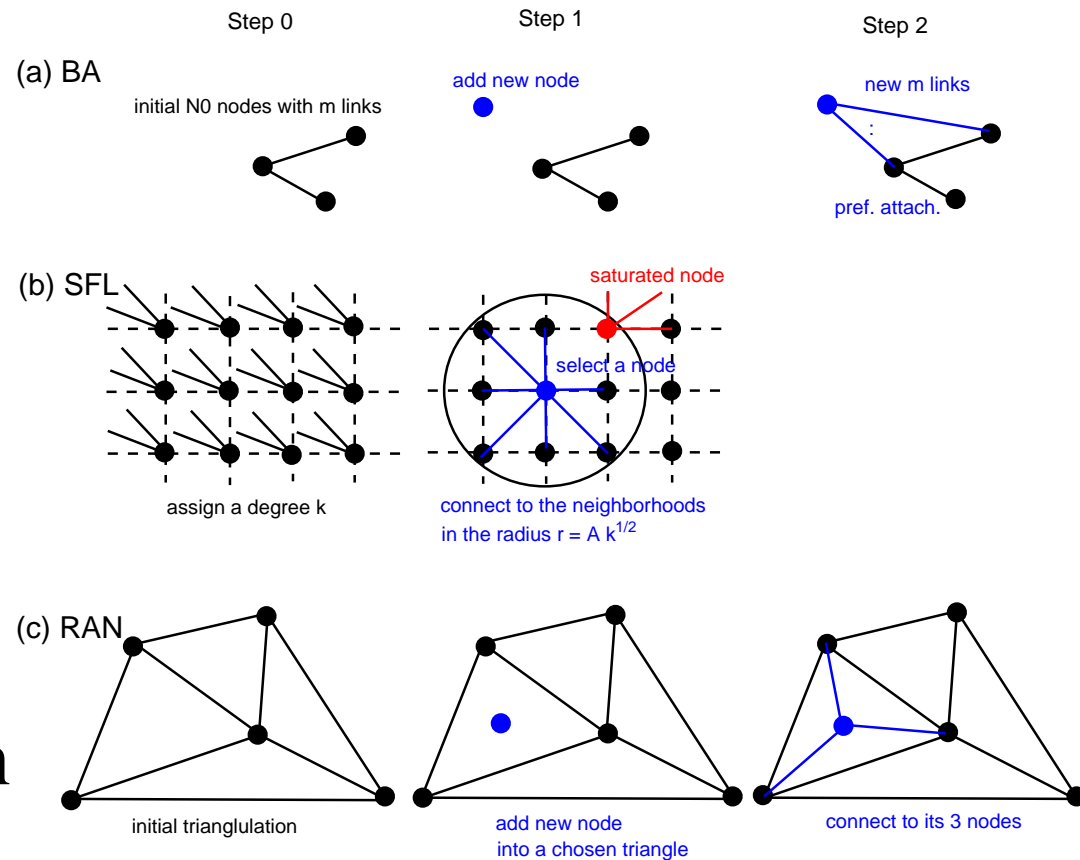
- Modulated BA:

$$\Pi_i \sim k_i \times l^\alpha,$$

rand. position
of node

- SF on lattices:
connect within
 $r = A \times k_i^{1/d}$

- Space-filling:
subdivision
of a region
(heterogeneous
dist. of nodes)



A6. Planarity and Shortness

class	planarity of net	shortness of links
<u>Modulated BA</u> Manna'02, Xulvi-Brunet'02	× ∃ crossing links (not prohibited)	○ with disadvantaged long-range links
<u>SF on lattices</u> ben-Avraham'03, Warren'02	× cross of regular links and shortcuts	△ ∃ long shortcuts from hubs
<u>Space-filling</u> Apollonian nets. Doye'05, Zhou'04	○ by subdivision of a selected region	△ ∃ long-range links in narrow triangles