

数学教育における知識創造を目指した数学的探究モデルの設計と教育実践

A Design and Educational Practice of the Mathematical Inquiry Model Aiming at Knowledge Creation in the Mathematics Education

葛城 元¹⁾, 黒田 恭史²⁾, 林 慶治³⁾

KATSURAGI Tsukasa¹⁾, KURODA Yasufumi²⁾, HAYASHI Keiji³⁾
din65034@kyokyo-u.ac.jp, ykuroda@kyokyo-u.ac.jp, hayashik@kyokyo-u.ac.jp

1) 京都教育大学大学院教育学研究科, 2) 京都教育大学教育学部, 3) 京都教育大学附属高等学校

1) Graduate School of Education, Kyoto University of Education,

2) Faculty of Education, Kyoto University of Education

3) Senior High School Attached to Kyoto University of Education

【要約】現在, 数学と他分野との協働化が推進されている. また, 次期高等学校学習指導要領の新科目「理数探究」においては, 生徒が探究の過程全体を自ら遂行できるようになることを主要な目標として位置付けている. 今後, 高等学校数学では, 生徒が試行錯誤したり, 探究したりする活動を数多く取り入れた数学教材を開発し, 実践していくことが重要である. そこで本研究では, 数学教育における知識創造を目指した数学的探究モデルの設計・数学教材の開発を行い, 京都教育大学附属高等学校の第1学年(40名)を対象に教育実践を実施し, モデルと本教材の有効性について検証することを目的とする.

【キーワード】知識創造, 知識活用, 数学教育, 理数探究

1. はじめに

現在, 日本の科学技術の動向として数学と他分野との協働化が推進されており, 社会的課題を数学的問題として取り上げ, 問題解決を図ることが必要とされている. 併せて, 数学以外分野に数学(代数, 幾何, 解析などの純粋数学や応用数学, 統計数学, 離散数学などの広範囲)を適応・展開可能な能力を有した人材の育成が希求されている(國府, 2015). しかし, 日本の高等学校の数学教科書の多くは, 純粋な数学の内容の解説と演習が大半であり, 現実事象と数学との関係性を積極的に取り上げようとする, 指導者の力量に委ねられることになる(黒田, 2014). また, 数学教育の立場から本来の目的を考えても, 数学知識の蓄積や数学内容を理解する力とともに, 学習者自らが数学的な観点から問題を発見し, 証明や実験するといった科学的な手法を用いて検証し, 問題解決するといった力の育成は重要である.

次期高等学校学習指導要領の改訂では, 新教科「理数科」が新設され「理数探究」が実施予定である. 「理数探究」のねらいは, 学習者に事象を解明する上での科学的な思考や探究の方法の基礎と, それらを活用することで, 新たな知識を創造することのできる力を習得させることである(文部科学省, 2016).

ところで, 数学教育において現実事象を対象に問題解決を図る取り組みの一つとして「数学的モデリング」の研究がなされてきた(1). 数学的モデリングでは, 数学が日常生活や社会的問題に役立つことや, 数学の学ぶ意義を見出すことを目的としており, その実践例の多くは数学授業の単元末で取り扱われてきた(西村, 2001). 近年の動向では, 探究的科目に対応可能な教授・学習法の一つとして, 「ディープ・アクティブラーニング」が提唱されている(松下, 2015). これは, 深い学び(学習の質・内容)を軸に, 学習者の能動的(主体的・対話的)な学習の実現を目指すものである. これらを実現するためには, 学習者が探究過程の中で, 試行錯誤したりする活動と, 深い数学的思考を必要とする質の高い数学教材を開発することが求められる. 数学を主軸とした理数探究を効果的なものとするには, 現実事象を対象に数学知識を適用・活用するといった学習活動を経験させ, 探究の方法の基礎を習得させることが重要であると考えられる. そのためには, 高等学校段階に相応しい科学的な思考, 及び探究の方法を明示化する「数学的探究モデル」の設計が必要である. そして, 数学的探究モデルに基づいた数学教材の開発と教育実践を通して, 客観的な効果測定とモデル自体の検証・改良を加えていかなくてはならない.

そこで本研究の目的は, 第一に数学教育における数学を主軸とした探究の過程全体の習得(知識創造)を目指した数学的探究モデルの設計・数学教材の開発を行うこと, 第二に京都教育大学附属高等学校の第1学年(40名)を対象に, モデルと本教材を用いて教育実践を行うこと, の2点から, モデルと本教材の有効性について検証することである.

2. 数学的探究モデルの設計

ここでは、科学的思考と数学的モデリングを参考に、「数学的探究」を定義する。そして、学習者自らが現実事象に対して、数学的な観点から問いを立て、客観的に妥当な仕方に基づき、数学知識を適用・活用し、問題解決することが可能になると考えられる「数学的探究モデル」の枠組みを図式化する(2)。

科学的思考とは、「観察や推断や推論を正しく行なって、なに人も納得せざるをえないような仕方では結論に達する思考、従って最も確かな最も信頼のおける知識を与えることのできる思考」と定義される(牧野, 1971)。科学的思考の対象は、現実の問題場面(日常的な場面から専門的な場面までを含み、広い意味で捉える)であり、客観的に妥当な方法を用いて問題解決(知識獲得のみでもよい)が行われる。

数学的モデリングとは、数学教育の中で現実事象の問題について、数学を用いて解決を実現する方法である(三輪, 1983, 西村, 2001, 柳本, 2001)。数学的モデリングは、図1に示す過程に従って問題解決が行われる(柳本, 2011)。まず、現実の問題場面(現実事象)を条件整理し、現実モデルを作成する。次に、現実モデルを数学的な表現に置き換え、数学モデルを作成する(数学化)。続いて、数学モデルを活用し、数学的处理を行うことで、数学的結果を導出する。最後に、得られた数学的結果をもとに、現実の問題場面へ翻訳し、解釈・評価が行われる。このような過程を何度も繰り返す、モデルを改良することで、問題解決が行われる。

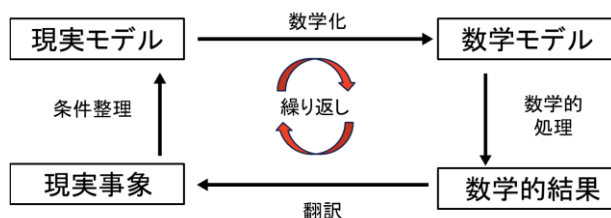


図1：数学的モデリングの過程(柳本, 2011)

したがって本稿では、数学的探究を「様々な現実事象に対して、数学的な観点から問いを立て、科学的思考を用いて問題解決すること」と定義し、数学的探究モデルを6つの段階で構成する。6つの段階とは、「(1) 問題発見」「(2) 計画」「(3) 情報収集」「(4) 情報整理」「(5) 数学的处理」「(6) 振り返り」のことであり、これらの段階を図式化したものが図2である。なお、図2の数学的探究モデルは、科学的思考、数学的モデリングの双方に対応するものであり、数学的探究モデルでは、「(1) 問題発見」「(2) 計画」「(3) 情報収集」「(4) 情報整理」の4つの段階を、明確に位置付けるようにした(3)。学習者が数学的探究を実現可能なものとするには、問いを自ら立てるという行為が必要であること、そして、現実事象に関連する情報・知識を獲得・整理し、それらを数学知識と組み合わせて、適切な数学的处理を行うことが重要であると考えられる。以下では、図2の数学的探究モデルの各段階の特徴を概観する。

「(1) 問題発見」とは、現実の問題場面(現実事象)に対して、既存知識に基づいて問題を想起・理解し、数学的な観点から何が問題であり、何を数学で解決したいのかを明確化する段階である(問題場的場面の作り出し)。そして、問題を想起・理解し、問題を明確化した時点で、次の段階「(2) 計画」に移行する。なお、問題の想起・理解が困難な場合についても、図2の点線をたどり、次の段階「(2) 計画」に移行する。

「(2) 計画」とは、明確化された問題に対して、必要な情報を得るための具体的な方法を考案する段階である。ここでは、本やインターネットなどの先行研究を調べる、観察する、実験する、見学するなどの、実際に自分で確かめる方法が挙げられる。加えて、問題解決するまでの見通しを立てることも行われ、そこでは、各段階で実行する内容や手順などが、おおまかに決定される。また、「(1) 問題発見」で問題を発見していない場合は、新たな情報を得るための案を検討することになる。そして、計画を実

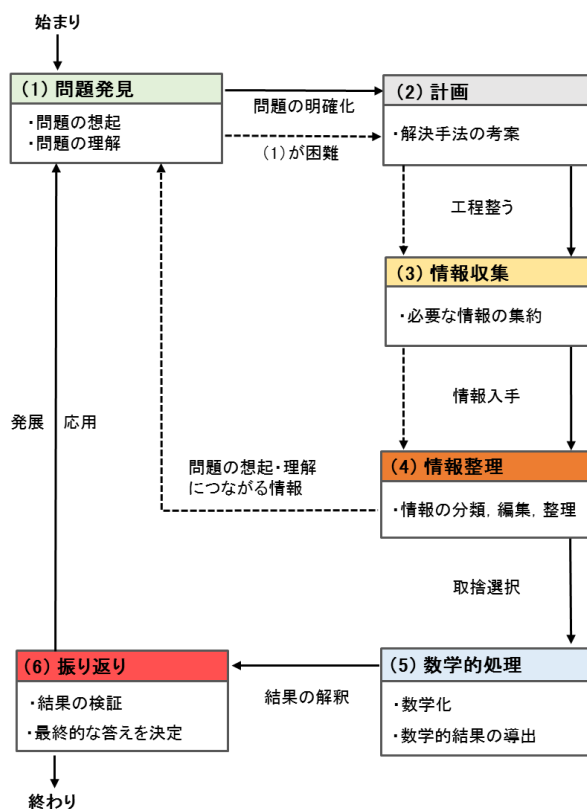


図2：数学的探究モデルの枠組み

行するための工程がある程度整った時点で、次の段階「(3) 情報収集」に移行する。

「(3) 情報収集」とは、計画に基づいて、調査する、観察する、実験する、計測する、記録するなどの具体的な活動を通じて、情報を収集する段階である。ここでは、必要に応じて物理的な器具やデジタル機器、計算機、電卓などのツールを用いる場合もある。そして、計画を実行し、必要な情報がある程度入手できた時点で、次の段階「(4) 情報整理」に移行する。

「(4) 情報整理」とは、得られた情報を分類する、比較する、選択するなどの操作活動を通じて、情報を編集・整理する段階である。これは、分散していた情報を理解し、関連付けるために行われる。その後、整理された情報を取捨選択することにより、次の段階「(5) 数学的处理」に移行する。また、図2の点線をたどる場合は、本段階で新たな情報、または問題の想起・理解につながる情報が得られるため、「(1) 問題発見」の段階に移行が可能である。

「(5) 数学的处理」とは、整理された情報を取捨選択することで数学化(数学モデルの作成)を行い、それをもとに適切に数学知識を適用・活用することで、数学的結果の導出を行う段階である。数学化(数学モデルの作成)では、取捨選択された情報を数量化、図形化、式化、変数化するなどといった数学的に表現する能力が要求される。数学的結果の導出では、作成した数学モデルをもとに、計算や証明などの的確な処理能力が要求される。その後、次の段階「(6) 振り返り」に移行する。

「(6) 振り返り」とは、得られた結果の検証を行い、最終的な答えを決定する段階である。結果の検証では、検証方法の確認や、導き出された結果に対する読み取り能力が要求される。

最後に、目的としていた問題が解決された場合は、「終わり」に移行する。また、その内容を新たな問題として発展・応用させることが可能な場合は、再び「(1) 問題発見」の段階に移行する。一方、どこかの段階で不都合が生じた場合は、加味・修正すべき要因は何かを考え、再び検証することになる。

3. 数学的探究モデルに基づく数学教材の開発

ここでは、日常の生活場面において、我々が自動販売機やコンビニエンスストアなどで手軽に購入することができる「キリンファイア挽きたて微糖(以降、「FIRE 缶」と記す)」のダイヤカット缶コーヒーを題材にした数学教材を、「数学的探究モデルの枠組み(図2)」に基づき開発する(4)。本稿では、FIRE 缶の構造を簡素化することで、折り紙を用いて製作した「簡易版缶模型」の体積計算の内容を紹介する。

3.1 「(1) 問題発見」

ダイヤカット缶とは、トラス(三角形の骨格構造)を立体的に組み合わせた、切り細工のような独特の形の加工が施された缶のことである(JAXA 第一宇宙技術部門, 2016)。我々の身近なところでは、図3のFIRE 缶に応用されている。このように、FIRE 缶の側面部分にダイヤカット構造を施すことで、缶の強度を維持したまま、材料費が削減できるため、利益向上と環境保全を実現している(キリンビバレッジ株式会社, 2016)。

ここで、FIRE 缶の側面部分にあるトラス構造に着目すると、缶の内側に凹みを有することから、凹みのない一般的な円柱型の缶コーヒーと比較すると、体積に相違があると考えられる(問題の場面の引き出し)。そこで問題を、「FIRE 缶コーヒー(トラス構造の部分)と円柱型缶コーヒーの体積の相違を解明する」と明確化する。

3.2 「(2) 計画」

図2の各段階で実行する内容を段階別に記す。「(3) 情報収集」では、インターネットでの検索やFIRE 缶の実物を手にとり、実際に自分で特徴を見出す。「(4) 情報整理」では、収集した情報の中で、問題解決する際に必要な内容を整理する。「(5) 数学的处理」では、FIRE 缶の構造を簡素化した「簡易版缶模型」を製作し、体積計算を行う(この計算方法を応用してFIRE 缶と円柱型缶コーヒーの体積を求める)。「(6) 振り返り」では、得られた結果の検証を行い、最終的な答えを決定する。

3.3 「(3) 情報収集」

インターネットの公式ホームページからFIRE 缶に関する情報を収集する。また、FIRE 缶の側面部分にある図形の辺の長さや角度、FIRE 缶自体の重さを測定するといった操作活動から情報を収集する。

■ FIRE 缶: 缶の強度を維持しながら軽量化を実現

主な特徴 → 材料費削減 & エコ実現

- 缶の強度 高
- 30g → 25g 17% 軽量化
- 利便・デザイン性 ○
- 三角形が規則的に配列

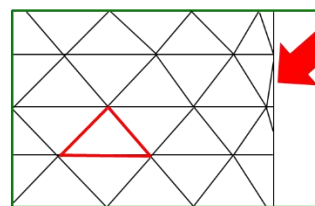


図3: FIRE 缶の概要(側面がトラス構造)

3.4 「(4) 情報整理」

得られた情報を整理すると、次のようになる。

- FIRE 缶の側面部分は、直角二等辺三角形が規則的に配列されていること（インターネットの情報、ものさし・分度器で測定）。
- FIRE 缶の模型は、折り紙を用いることで製作と分析が可能であること（インターネットの情報）。
- FIRE 缶の規格（缶の高さや幅など）は、他社製品と同じ規格であること（ものさしで測定）。

3.5 「(5) 数学的处理」

「(5) 数学的处理」の段階では、「数学化(数学モデルの作成)」と「数学的結果の導出」が行われる(図4)。

数学化(数学モデルの作成)では、一枚の紙を用いて、FIRE 缶模型を製作する。「(4) 情報整理」の内容から、FIRE 缶の側面部分にある三角形の形状は、直角二等辺三角形であると判断する。FIRE 缶では、基本正方形(二つの直角二等辺三角形を合わせてできる一辺の長さが1の正方形)の個数は垂直方向に5個、水平方向に11個あることを考慮して紙を折れば、FIRE 缶模型を製作することが可能である。併せて、FIRE 缶模型の構造を簡素化した「簡易版缶模型」を製作できるため、以下では、体積の計算処理を軽減するために、簡易版缶模型を用いることにする。

数学的結果の導出では、簡易版缶模型と円柱模型の体積を計算し比較する。仮定は、簡易版缶模型の展開図の縦横の長さと、平面図が正八角形であるとする(FIRE 缶と円柱型缶コーヒーでも、上の二つの仮定を変更すれば、同様に計算が可能)。

簡易版缶模型の体積計算の方法として、「間接的方法」と「直接的方法」がある。間接的方法とは、正八角柱と三角錐といった身近な図形に置き換えて体積計算を行う方法である。

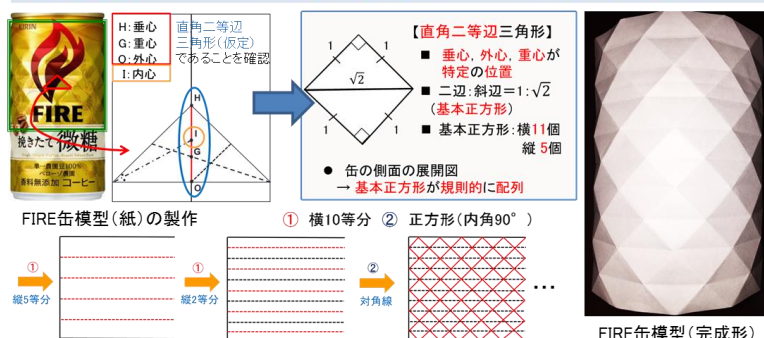
具体的には、簡易版缶模型に正八角柱模型を外接させると、隙間部分の図形が三角錐模型(16個分)になることから、簡易版缶模型の体積は、正八角柱模型の体積から三角錐模型(全部で16個分)を引くことで求めることができる。三角錐模型と正八角柱模型の体積計算については、平面・空間図形の性質、三平方の定理(中学数学)や三角比(高校数学)などの数学内容を組み合わせて計算することができるため、複数通りの解法を見出すことが可能である。一方、直接的方法とは、身近な図形を見出すという目的のもとで簡易版缶模型を分断し、分断した図形の体積を計算する方法である(発展内容として2種類を開発)。こちらも、分断する方法は多様であり、複数通りの解法を見出すことが可能である。

3.6 「(6) 振り返り」

結果の検証では、複数の解法による体積計算の結果を照合する、実際に三角錐・正八角柱も模型を製作する、FIRE 缶と円柱型缶コーヒーを用いて実測活動などを行う。最終的な答えとして、FIRE 缶では約 133.0 cm^3 、円柱型缶コーヒーでは約 138.6 cm^3 である(体積の差は約 4.0% である)という結果が得られた(ちなみに、簡易版缶模型と円柱模型の体積の差は、約 27.5% である)。

● 数学化(数学モデルの作成)

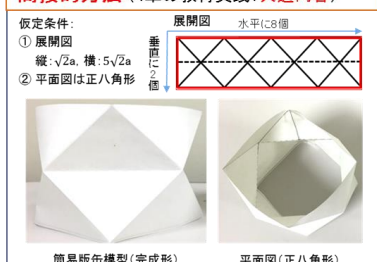
「(4) 情報整理」→ FIRE 缶の側面は直角二等辺三角形(仮定)、平面図は正二十三角形(仮定)



● 数学的結果の導出(※計算処理を軽減するために、以下では「簡易版缶模型」を使用)

特徴: 「間接的方法」と「直接的方法」の2種類を開発。(いずれの方法も解法が複数存在)

間接的方法(4章の教育実践: 共通内容)



※ FIRE 缶模型: ①の縦横の長さ、②が正二十三角形に変更

◎ 簡易版缶模型 = 正八角柱 + 三角錐 × 16個(間接的)



結果: 体積 27.5% 差

簡易版缶模型: 366.76 cm³

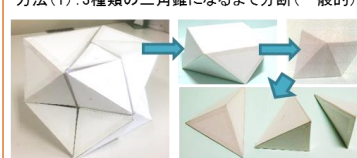
円柱模型: 505.54 cm³

※ a=5で考えた場合

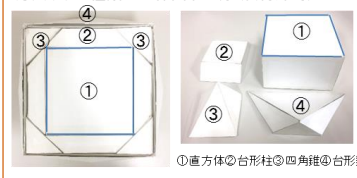
直接的方法(4章の教育実践: 発展内容)

◎ 簡易版缶模型を身近な図形に切断していく

方法(1): 3種類の三角錐になるまで分断(一般的)



方法(2): 4種類の立体図形に分断(特殊的)



①直方体②台形柱③四角錐④台形錐

最終結果: 体積 4% の差

FIRE 缶: 133.0 cm³

円柱型缶コーヒー: 138.6 cm³

※ 液面から飲み口までの高さで比べると、約0.3mmの差(少)

図4: 数学化(数学モデルの作成)と数学的結果の導出

4. 数学的探究モデルと数学教材を用いた教育実践

4.1 教育実践の概要

教育実践の概要は、以下の通りである。

目的：高校生を対象に、数学的探究モデルに基づいた教育実践を行い、生徒の学習実態を踏まえた上での、モデルと本教材の有効性を検証する。ここでは、「(5) 数学的处理」の段階において、既習の数学知識を適用・活用し、それらを組み合わせることで、深い数学的思考を実現することや、数学内容の理解向上を図ることができたのかを把握する。

題材：「簡易版缶模型と円柱模型の体積を調べよう」

対象：京都教育大学附属高等学校，第1学年，計40名

時期：2017年1月11日（50分×2回），12日（50分×2回）

の計4回

内容：「簡易版缶模型の製作・体積計算（50分×2回）」，

「簡易版缶模型の体積計算（別解法）（50分×2回）」

実態：2016年10月（40分×6回）に、「FIRE 缶の図形の性質を調べよう」というテーマで、図形の性質に関する内容を学習した。1・2回目では、「(5) 数学的处理」で扱う折り紙を用いた基礎的な数学の内容を学習した。3・4回目では、「簡易版缶模型の製作・分析」を、指導者主体で数学的探究モデルの枠組みを1周した。5・6回目では、「オリジナル模型の製作・分析」を、生徒主体で2周目を実施した。

4.2 教育実践の結果

「簡易版缶模型の製作・体積計算（50分×2回）」の教育実践の結果を記す（図5参照）。

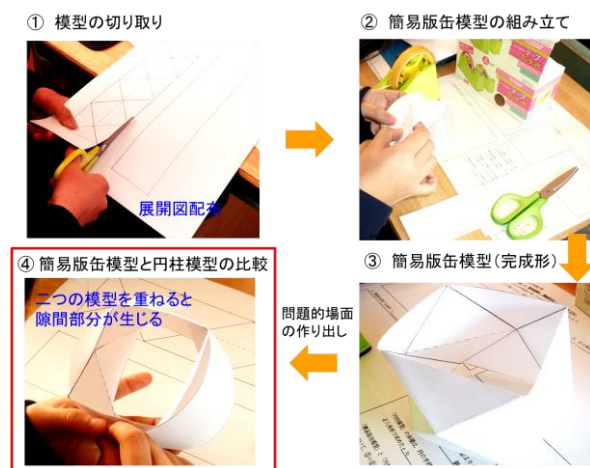


図6：簡易版缶模型と円柱模型の製作活動

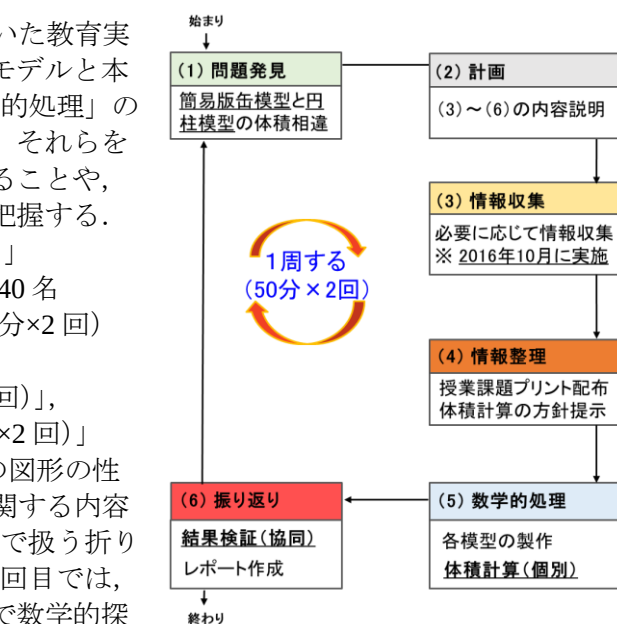


図5：「簡易版缶模型の製作・体積計算（50分×2回）」の授業概要

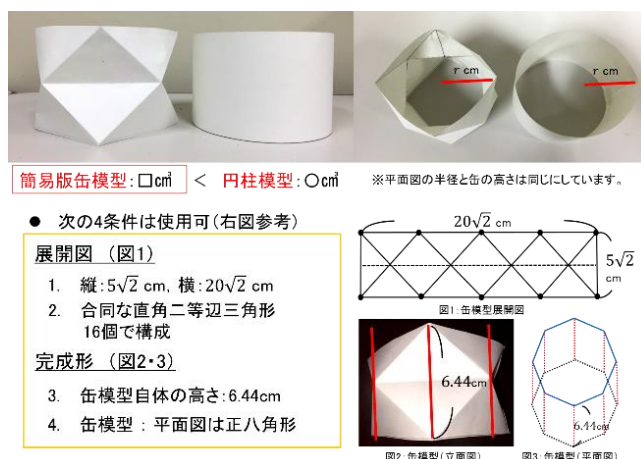


図7：授業課題（配布プリント）の内容

「(1) 問題発見」の段階では、次のように実施した（10分）。まず、前回の内容（数学的探究モデルの枠組みや活動内容）を復習し、そこから生徒に、簡易版缶模型と円柱模型の模型を製作するように伝えた。生徒が実際に行った簡易版缶模型と円柱模型の製作過程を示す（図6）。簡易版缶模型と円柱模型の展開図を生徒に配布し、はさみを使用して切り取った（①）。簡易版缶模型の展開図では、実線は谷折り、点線は山折りに従って折った（②）。紙の接合部分をセロハンテープで結合すると、簡易版缶模型が完成した（③）。円柱模型は①で切り取った用紙の接合部分を結合するだけで製作できた。ここで、問題場面を作り出すために、簡易版缶模型に対して円柱模型を外接させ（模型比較）、簡易版缶模型と円柱模型に隙間が生じることを全員で確認した（④）。次に、指導者がFIRE 缶コーヒー（側面に凹み）と円柱型缶コーヒー（凹みのない円柱型）の実物を提示した。そこから、簡易版缶模型と円柱模型に隙間が生じることと同様に、FIRE 缶コーヒーの側面部分にある凹みは、缶の内側に入り組んでおり、凹みのない円柱型缶コーヒーと比較すると、その分の容量（体積）が少なくなることを視覚的に確認した。

「(2) 計画」の段階では、指導者から各段階で実施する内容を説明した。

「(3) 情報収集」の段階では、2016 年 10 月に FIRE 缶に関する情報を収集しているため、割愛した。

「(4) 情報整理」の段階では、次のように実施した ((2) (3) (4) の段階を合わせて 10 分)。問題的場面の授業課題化では、「簡易版缶模型と円柱模型の体積を比較しよう」と設定し、体積計算に必要な条件を記した授業課題のプリントを配布した (図 7)。ここでは使用すべき条件として、「簡易版缶模型自体の高さや平面図が正八角形」「簡易版缶模型の展開図の縦横の長さ」「側面の三角形が直角二等辺三角形」を提示した。そして、簡易版缶模型の体積を求める方針の一つとして、正八角柱模型を製作させ、製作した正八角柱の体積から隙間部分に生じる図形を引けば、簡易版缶模型の体積が求まることを指導者から提示した。ただし、隙間の図形が三角錐模型であることは、生徒に考えるように指示した(5)。

「(5) 数学的处理」の段階では、製作した模型と配布プリントを用いて、「簡易版缶模型の体積計算」を行った (80 分)。体積計算時は主に個別学習を行うため、生徒一人ひとりには、簡易版缶模型、正八角柱模型、はさみ、セロハンテープ、関数電卓、レポート用紙、補足資料 (三角比の公式プリント、関数電卓の操作方法プリント) を準備し、個人思考ができるように学習環境を整備した (図 8 の左図)。

「(6) 振り返り」の段階では、生徒が導き出した体積計算の結果が妥当であるかを、実際に水を入れて検証できるようにした (図 8 の右図)。簡易版缶模型 (検証用) の容器が満水状態になれば、体積を正しく求められていることが確認できる。結果の検証時は、生徒自身の理解を確認・深めるためにも協同 (2・3 人) で活動するように指示した。最後に、体積計算の結果を個別でレポートにまとめさせた。



図 8：簡易版缶模型の体積計算の場面 (体積計算時は主に個別学習、検証・修正時は主に協同学習)

教育実践の最終的な結果として、簡易版缶模型と円柱模型の体積を正確に求めることができた生徒は (欠席者 1 名を除いた)、39 名中 32 名 (約 82%) であった。残りの 7 名 (約 18%) は、簡易版缶模型の体積を求めるまでの方針は理解しているが、数学的な処理の仕方 (計算、公式適用) に誤りがあった。

個別学習の場面では、辺や角の情報を簡易版缶模型自体に直接書き込み、その都度、展開図や初期条件を用いて体積計算を行っていた (全員が関数電卓を使用)。体積計算時の方針の立て方に着目すると、三角錐、正八角柱模型、簡易版缶模型と順序を決めて体積計算を行う生徒と、各模型を相互に対応させ、並行して体積計算を行う生徒がいた。そして、解法に着目すると、三角錐模型と正八角柱模型の体積を求める方法に異なる特徴が見られた。三角錐模型では、底面積を求める際に必要となる「底辺」と「高さ」について、三平方の定理 (中学数学) で求める方法と、三角比の定義・定理 (高校数学) で求める方法が確認された。一方、正八角柱模型では、正八角柱の底面である正八角形の面積を求める際に、三角形 4 つと正方形 1 つに置き換えて求める方法 (算数・中学数学) と、正八角形の中心から、8 つの合同な三角形に分割し、三角比の面積公式 (高校数学) で求める方法が確認された。いずれの方法においても、辺の長さや角度を求める際に、既に与えられた条件、および簡易版缶模型を相互に対応させながら、必要な部分を抽出し、そこから立式、計算するといった数学的な処理の仕方に困難性が見られた。体積検証の場面では、最初から正答に導ける生徒は実際に少なく、各模型の体積を求める際に必要な辺の取り違いや、公式の適用・計算の間違いに誤りが見られたが、生徒同士で力を合わせて解決していた。

次の授業の「簡易版缶模型の製作・体積計算 (別解法) (50 分×2 回)」では、本授業の課題内容を継続して取り組んだ (課題内容を終えた生徒は、図 4 の発展内容に挑戦した)。

4.3 教育実践の分析・考察

4.3.1 分析の概要

教育実践の分析の概要は、以下の通りである。

目的：「(5) 数学的处理」の段階において、既習の数学知識を適用・活用し、それらを組み合わせることで、深い数学的思考を実現することや、数学内容の理解向上を図ることができたのかを、事後アンケート調査とレポート課題の内容を分析することで把握する(6)。

対象：京都教育大学附属高等学校、第1学年、39名（欠席者1名を除いた）

時期：2017年1月12日（配布）、2017年1月20日（回収）

内容：以下の二つを実施

(1) 事後アンケート調査

- ・4段階評価の選択式設問（計9問）と自由記述式の設問（感想記述）を回答

(2) レポート課題

- ・「簡易版缶模型（展開図・完成形）」「三角錐模型」「正八角柱模型」「まとめ（答えを記述）」の4枠をレポート用紙に設け、体積計算の計算過程を言葉・表・絵・図などを用いて記述

4.3.2 事後アンケート調査の内容

事後アンケート調査の概要を記す。図9の縦軸は「調査項目（①～⑨）」、横軸は「4段階評価（そう思う、だいたいそう思う、どちらかというと思う、そうは思わない）」を表している（以降、「そう思う」と「だいたいそう思う」を合わせて「肯定回答」、「どちらかというと思う」と「そうは思わない」を合わせて「否定回答」と記す）。なお、縦軸の調査項目（①～⑨）については、図2の数学的探究モデルの各段階に位置付くように概ね対応させている。

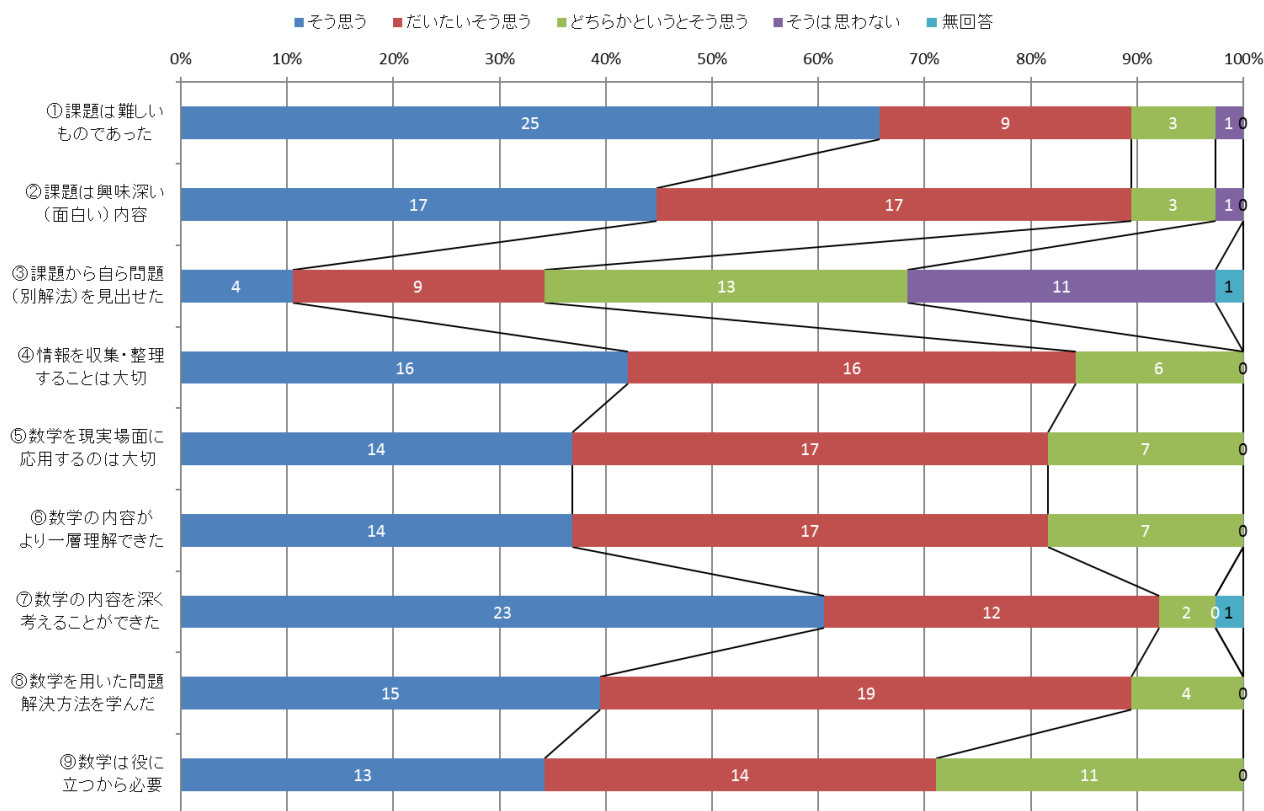


図9：4段階評価の選択式設問（計9問）の集計結果（N=38）

事後アンケート調査の集計結果を記す（全項目の回答者数は38名で、未提出者1名を除いた）。

①と②は本課題の内容が適度な難度で関与しやすいものであったのかを問うものであり、肯定回答がいずれも34名（約89%）であった（モデルの枠組み全体）。③は与えられた課題から、生徒自らが数学的な観点から体積の別解法計算を見出したかを問うものであり、肯定回答が13名（約34%）であった（「(1) 問題発見」）。④は情報収集・整理をする活動が問題解決していく上で大切であるかを問

うものであり、肯定回答が 32 名（約 84%）であった（「(3) 情報収集」「(4) 情報整理」）。⑤は既習の数学内容を適用・応用することは大切であるかを問うものであり、肯定回答が 31 名（約 82%）であった。⑥は数学的处理を行う中で、既習の数学内容をより一層理解することができたのかを問うものであり、肯定回答が 31 名（約 82%）であった（「(5) 数学的处理」）。⑦は数学知識を組み合わせることで、数学の内容を深く学ぶことができたのかを問うものであり、肯定回答が 35 名（約 92%）と、全項目の中で最も高かった（「(5) 数学的处理」）。⑧は数学的探究モデルの枠組みに従って、既習の数学を用いて問題解決することができたのかを問うものであり、肯定回答が 34 名（約 89%）であった（「(6) 振り返り」）。⑨は本授業を通じて、数学の有用性や数学を学ぶ意義を体験させることができたのかを問うものであり、肯定回答が 27 名（約 71%）であった（モデルの枠組み全体）。

「(5) 数学的处理」の段階に対応する調査項目⑥・⑦・⑧について、肯定回答と否定回答のクロス集計表を作成し、2 項目間の比較（2 項目間の間に関連があるかの検定）を行った（表 1・2・3）。Fisher の正確確率検定（両側検定）の結果、⑥と⑦、⑥と⑧の二つについては、肯定回答と否定回答の間に関連があることが認められた（⑥と⑦： $*p=.042(p<.05)$ 、⑥と⑧： $*p=.015(p<.05)$ 、⑦と⑧： $p=.207 \text{ n.s.}(.10<p)$ ）。

表 1：⑥と⑦のクロス集計表

⑥/⑦	肯定	否定	計
肯定	29	0	29
否定	6	2	8
計	35	2	37

無回答（1 名） $*p=.042(p<.05)$

表 2：⑥と⑧のクロス集計表

⑥/⑧	肯定	否定	計
肯定	30	1	31
否定	4	3	7
計	34	4	38

$*p=.015(p<.05)$

表 3：⑦と⑧のクロス集計表

⑦/⑧	肯定	否定	計
肯定	32	3	35
否定	1	1	2
計	33	4	37

無回答（1 名） $p=.207 \text{ n.s.}(.10<p)$

4.3.3 レポート課題と自由記述の内容

ここでは、「(5) 数学的处理」の段階について、レポート課題を用いて、簡易版缶模型の体積計算における解法の特徴を明らかにするために、間接的方法で利用した「三角錐模型」と「正八角柱模型」の解法に着目し、「中学数学活用群（流動タイプ）」「中・高数学活用群（流動タイプ）」「中・高数学活用群（相互タイプ）」「高校数学活用群（相互タイプ）」の 4 つの群に分類・整理した（図 10・11・12・13）。そして、各群の「(5) 数学的处理」における特徴を、レポート課題と自由記述の内容をもとに分析した。

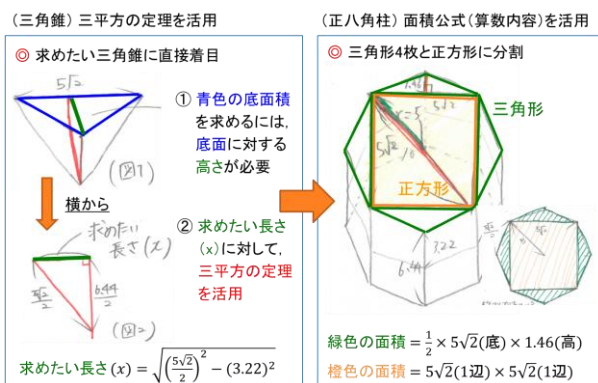


図 10：中学数学活用群（流動タイプ）：7 名

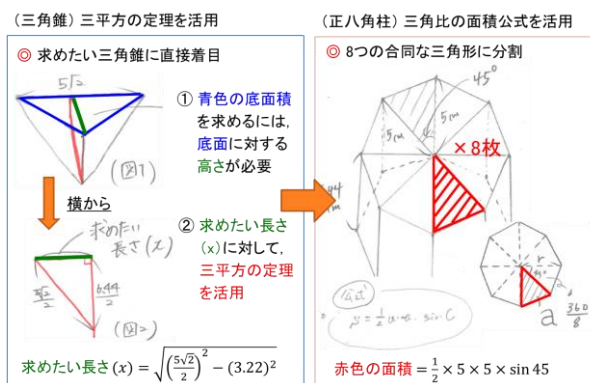


図 11：中・高数学活用群（流動タイプ）：14 名

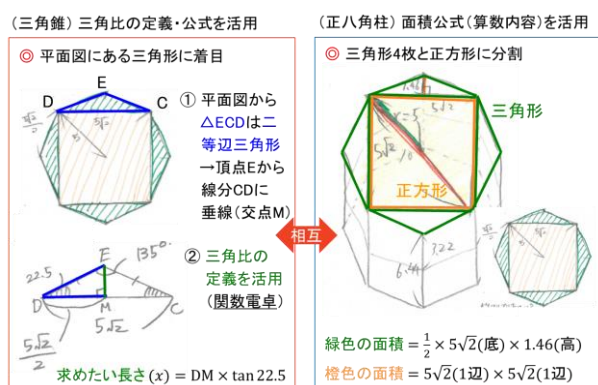


図 12：中・高数学活用群（相互タイプ）：7 名

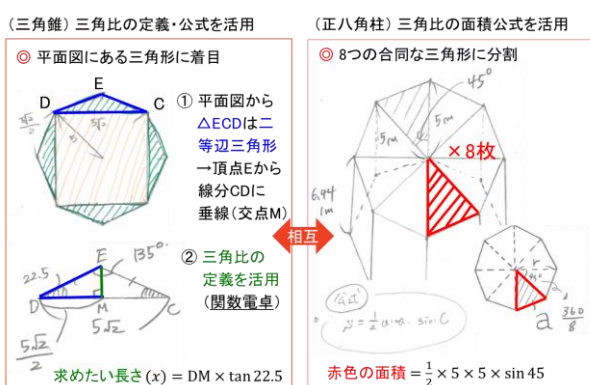


図 13：高校数学活用群（相互タイプ）：9 名

中学数学活用群（流動タイプ）とは、計算順序を展開図、三角錐模型、正八角柱模型、簡易版缶模型と決定し、三角錐模型の計算では、中学数学（三平方の定理）、正八角柱模型の計算では、算数（三角形・正方形の面積公式）を用いて解決する群であり、37名中7名（約19%）が該当した（図10）。

中・高数学活用群（流動タイプ）とは、計算順序を展開図、三角錐模型、正八角柱模型、簡易版缶模型と決定し、三角錐模型の計算では、中学数学（三平方の定理）、正八角柱模型の計算では、高校数学（三角比の面積公式）を用いて解決する群であり、37名中14名（約38%）が該当した（図11）。

中・高校数学活用群（相互タイプ）とは、計算順序を固定せずに、展開図・各模型を相互に対応させており、三角錐模型の計算では、高校数学（三角比の定義・公式）、正八角柱模型の計算では、算数（三角形・正方形の面積公式）を用いて解決する群であり、37名中7名（約19%）が該当した（図12）。

高校数学活用群（相互タイプ）とは、計算順序を固定せずに、展開図・各模型を相互に対応させており、三角錐模型の計算では、高校数学（三角比の定義・公式）、正八角柱模型の計算でも、高校数学（三角比の面積公式）を用いて解決する群であり、37名中9名（約24%）が該当した（図13）。

表4は、各群における「(5) 数学的处理」の段階に関する自由記述の内容を要約したものである。いずれの群も、各模型に対して、既習の数学内容を適用、活用することの難しさ（計算処理も含む）、高校数学活用群を除いては、方針を立てることの難しさについて記述が見られた。また、これ以外にも、現実事象を数学で考えることの具体例を知れた、簡易版缶模型の体積計算で使用した関数電卓の利便性、指導者が方針提示の場面で説明した「間接的方法」の発想の良さ、などを評価する記述も確認できた。

ここで、「流動タイプ」と「相互タイプ」のタイプ別に分け、各群の特徴を分析・考察した。

流動タイプでは、よく知れた身近な図形を見出すという目的意識のもとで方針を立て、各場面に必要な数学内容を適用・活用したと考えられる。また、中学数学活用群の(1)の記述内容からは、他の群と解法を共有することで、中学数学のみならず、高校数学を適用・活用できることに気付けたことが学びになったと推察される。中・高数学活用群の(2)の記述内容からは、(1)の内容も含めた上で、図形を様々な角度から視点で見ることに、気付けたことが学びになったと推察される(14名中8名が記述)。

相互タイプでは、立体図形を平面的に捉えるといった統一的な視点から、図形の特徴を見出すという目的意識のもとで方針を立て、各場面に必要な数学内容を適用・活用したと考えられる。また、中・高数学活用群の(3)の記述内容からは、平面図である正八角形を身近な図形（三角形と正方形）に置き換えて考えて計算することが学びになったと推察される。高校数学活用群では、抽象的に高度な数学内容（三角比の定義・定理）を各場面でも適用・活用することができているが、(4)の記述内容からは、流動タイプの方針の立て方や、三角形と正方形といった身近な図形に置き換えて考えるといった解法に、気付けたことが学びになったと推察される。なお、高校数学活用群では、事後調査アンケートの調査項目⑦「数学を用いた問題解決の方法を学ぶことができた」の肯定回答について、「そう思う」が9名中7名、「だいたいそう思う」が9名中2名と、他の3つの群よりも高い結果が得られた。

表4：各群における「(5) 数学的处理」の段階に関する自由記述の内容要約

<u>中学数学活用群（流動タイプ）：7名</u>	
・方針（展開図、三角錐、正八角柱、簡易版、円柱の順）を立てることの難しさ ・既習の数学内容（算数・中学数学）を適用、活用することの難しさ（計算処理も含む） ・他の群が、三角比を適用・活用して計算しているところが学びになった… (1)	
<u>中・高数学活用群（流動タイプ）：14名</u>	
・方針（展開図、三角錐、正八角柱、簡易版、円柱の順）を立てることの難しさ ・既習の数学内容（中学数学・高校数学）を適用、活用することの難しさ（計算処理も含む） ・隙間の図形（三角錐模型）を認識することの難しさ ・答えを求めるための解法が1通りでないことに気付けたことが学びになった（多様な視点）… (2)	
<u>中・高数学活用群（相互タイプ）：7名</u>	
・方針（展開図、三角錐、正八角柱を相互に関連付けながら）を立てることの難しさ ・既習の数学内容（高校数学）を適用、活用することの難しさ（計算処理も含む） ・身近な図形に置き換えて考えることの大切さを学んだ… (3)	
<u>高校数学活用群（相互タイプ）：9名</u>	
・既習の数学内容（高校数学）を適用、活用することの難しさ（計算処理も含む） ・他の群の解法が学びになった（流動タイプの方針、身近な図形に置き換えて考えること）… (4)	

5. まとめ

本研究では、第一に数学を主軸とした探究の過程全体を習得するための数学的探究モデルを設計し、FIRE 缶コーヒーを題材に、生徒が試行錯誤したりする活動と、深い数学的思考を必要とする内容を取り入れた数学教材を開発した。第二に京都教育大学附属高等学校の第1学年(40名)を対象に教育実践を行い、得られた結果をもとに分析した。モデルと本教材の有効性をまとめると、次のようになる。

- ①事後アンケート調査から、⑥数学内容をより一層理解できた、⑦数学内容を深く思考できた、⑧数学を用いた問題解決方法を学んだでは、肯定回答が80%を超える高い結果を得たこと、レポート課題から、各模型の体積計算において、複数の解法を確認し、4つの群に分類して、特徴を分析できたこと。
- ②個別学習では、模型(対象)に対して数学内容を適用・活用することで、個々人の数学的思考を深めることができたこと、協同学習では、個々人の考え方を共有することで、答えを求めるための解法(方針の立て方や数学内容の適用・活用場面)といった、集団における深い数学的思考を創出できたこと。

注

- (1)数学的モデリングの内容については、第2章で詳細に記す。
- (2)葛城・黒田(2016)で論じた「2. 科学的思考方法とは」の内容を大幅に加筆・修正を行ったものである。
- (3)「(1) 問題発見」は、数学的モデリングの過程の「現実世界の問題」, 「(4) 情報整理」は、数学的モデリングの過程の「現実モデル」, 「(5) 数学的处理」は、数学的モデリングの過程の「数学モデル」「数学的結果」, 「(6) 振り返り」は、数学的モデリングの過程の「現実世界の問題」に該当する。
- (4)キリンビバレッジ株式会社のお客様相談室を介して、ホームページ「FIRE 挽き立て微糖」に掲載されている画像の使用許可を頂いた(許諾日:2016年4月19日)。(http://www.kirin.co.jp/products/softdrink/fire/hikitate_bitou/) [2017, Feb, 28]
- (5)「間接的方法」の利点は、簡易版缶模型といった複雑な図形を正八角柱模型や三角錐模型などの一般によく知れた図形で置き換えることで、体積計算の負担を軽減できる点にある。しかし、この方法は三角錐を認識することや、体積を求めるという考え方・発想自体を、生徒自ら見出すことが理解困難な点の一つとして挙げられている(葛城・黒田, 2016)。
- (6)学習者が知識・技能を総合的に活用する課題内容を的確に捉えるためには、様々な評価方法を上手く組み合わせて評価することが重要であると指摘している(石井, 2015, 松下, 2016)。そこで本稿では、教育実践の内容を構築・評価する際の一つの指標として、数学的探究モデルの枠組みを活用し、本教材とモデル自体の有効性を検証する。

参考文献

- 石井英真(2015)「新しい学力と学びをどう評価していけばよいのか」『今求められる学力と学びとは—コンピテンシー・ベースのカリキュラムの光と影—』日本標準, 55-74.
- 葛城元・黒田恭史(2016)「SSH 授業におけるオリガミクスを用いた教材開発とその実践」『第20回 数学教育学会 大学院生等発表会発表論文集』pp. 4-9.
- 葛城元・黒田恭史(2016)「科学的思考方法の育成を目指したオリガミクスによる数学教材の開発と実践」『第41回 教育システム情報学会全国大会 学生研究特別セッション』pp. 275-276.
- 黒田恭史(2014)「数学教育における実践とは」黒田恭史編著『数学教育実践入門』共立出版, pp. 5-6.
- 黒田恭史・葛城元・林慶治(2015)「高等学校文系クラスにおけるオリガミクスを用いた SSH の授業の可能性—オイラー線とダイアカット缶を題材として」『数学教育学会秋季例会 発表論文集』数学教育学会, pp. 1-4.
- 國府寛司(2015)「数学と諸分野の協働の推進のために数学・数理科学の教育について考えること」『2015 年度 数学教育学会秋季例会 発表論文集』pp. 142-143.
- 西村圭一(2001)「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」『日本数学教育学会誌』83(11), pp. 2-12.
- 牧野宇一郎(1971)『探究の構造』東海大学出版会.
- 松下佳代(2015)「ディープ・アクティブラーニングへの誘い」松下佳代編著『ディープ・アクティブラーニング』勁草書房, pp. 1-27.
- 松下佳代(2016)「アクティブラーニングをどう評価するか」松下佳代・石井英真編著『アクティブラーニングの評価』東信堂, pp. 3-25.
- 文部科学省 教育課程部会(2016)「理数探究(仮称)に関する資料 数学・理科にわたる探究的科目の在り方について」(http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/060/siryo/_icsFiles/afieldfile/2016/05/12/1370460_12.pdf) [2017, Feb, 28]
- 三輪辰郎(1983)「数学教育学におけるモデル化についての一考察」『筑波数学教育研究』2, pp. 117-125.
- 柳本哲(2001)「数学教育と総合学習」Max Stephens・柳本哲『総合学習に生きる数学教育』明治図書, pp. 25-34.
- 柳本哲(2011)「数学的モデリングとは何か?」柳本哲編著『数学的モデリング—本当に役立つ数学の力』明治図書, pp. 5-22.

連絡先

住所: 〒612-8522 京都府京都市伏見区藤森町1番地 京都教育大学 大学院教育学研究科

名前: 葛城元

E-mail: din65034@kyokyo-u.ac.jp