

四訂水谷研究室物理数学基礎知識例題

(第1回; ベクトル、行列、テンソル)

1. $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ とするとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ を書き下せ。
また $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 0)$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ を計算せよ。
2. \vec{a} と \vec{b} のなす角度を θ とする。このとき $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ を $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ と θ で表せ。
また $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ をそれぞれ幾何学的に作図せよ。
3. $|\vec{a}|$ を \vec{a} の成分を用いて表せ。
4. ベクトル $(\sqrt{3}, 1, 0)$, $(1, \sqrt{3}, 0)$ のなす角を求めよ。途中の式も書くこと。
5. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ であることを証明せよ。
6. 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。
7. 行列 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。
8. 行列 \mathbf{A} の固有値と固有ベクトルの定義を述べよ。またこれらは量子力学でどのように登場するか述べよ。
9. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め、対角化せよ。
10. ユニタリ行列の定義を述べよ。
11. エルミート行列の定義を述べ、その固有値の特徴を述べよ。
12. ベクトル \vec{a} の直線 m 上への射影の長さは、その直線 m 上の単位ベクトルを \vec{e} とし、内積 $\vec{a} \cdot \vec{e}$ で表される。
13. テンソルの定義を述べよ。
14. 二次の非線形分極を展開する式、
$$\vec{P} = \chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E}$$
を成分で表せ。
15. 量子力学でいう物理量 O を bra vector $\langle i|$, ket vector $|j\rangle$ で両側からはさんだもの $\langle i|O|j\rangle = O_{ij}$ は行列の成分の性質をもっている。物理量からつくった行列はかならずエルミート行列である。