

四訂水谷研究室物理数学基礎知識例題

(第3回；関数と微分積分、微分方程式)

1. 次の関数をグラフに描け。なお、グラフの日盛りは関数の特徴を表現するように選ぶこと。

$$y = \sin x \quad y = \cos x \quad y = \exp(x) \quad y = \exp(-x) \quad y = \ln x \quad y = \exp(-x^2)$$

2. 1.の関数を微分せよ。

$$3. \int a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 dx = ?$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

4. 関数 $f(x)$ を x_0 のまわりでテーラー展開せよ。(第4項まで)

$$5. \exp(ikx) = \cos kx + i \sin kx$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = i\vec{k} \cdot \vec{E} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = i\vec{k} \times \vec{E} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$$

6. ステップ関数 ($y=0$ for $x<0$, $y=1$ for $x \geq 0$) を微分すると $\delta(x)$ となる。

7. 関数 $y = \frac{\sin^2 xt}{x^2}$ の概形を描け。(量子力学でよくでる関数である)

8. 次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx} = ax \quad \frac{dy}{dx} = ay \quad \frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = 0$$

9. 微分方程式 $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = f(x)$ の解き方を述べよ。

実際には解かなくてよい。

$$10. \int f(x,y,z) dx dy dz = \int f(r,\theta,\phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\int f(x,y) dx dy = \int f(r,\theta) r dr d\theta$$

置換積分

11. $e=2.71828$ (フナイハニハ) $\pi=3.141592$ (サイシイコクニ)

12. ハイパボリックサイン、ハイパボリックサイン、ハイパボリックタンジェントは、

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\end{aligned}$$

13. $\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
14. $f(t)$ から $F(\omega)$ へのフーリエ変換は

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

その逆変換は

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$