離散数学レポート

010119:大和谷 潔

平成 12 年 7 月 26 日

問題 1

つぎの不定方程式を解け。

1. $13X + 17Y = 1$
2. $19X + 5Y = 1$

解答

(1)

$$\begin{aligned}
13X + 17Y &= 13(X+Y) + 4Y && (1)\\
Z = X + Y \text{ として} & && (2)\\
&= 13Z + 4Y && (3)\\
&= 4(Y + 3Z) + Z && (4)\\
W = Y + 3Z \text{ として} & && (5)\\
&= 4W + Z = 1 && (6)
\end{aligned}$$

ここで $W = t$ として、(6) に代入すると $4t + Z = 1$ となり、$Z = 1 - 4t$ をえる。

これらを (5) に代入し、$t = Y + 3(1 - 4t)$ を得て、$Y = 13t - 3$ を得る。

さらに (2) より、$1 - 4t = X + (13t - 3)$ となり、$X = -17t + 4$ が得られる。

よって、一般解

$$(X, Y) = (-17t + 4, 13t - 3)$$

を得る。

(2)

$$
\begin{aligned}
19X+8Y &= 3X+8(2X+Y) && (1)\\
Z=2X+Y \text{ として} & && (2)\\
&= 3X+8Z && (3)\\
&= 3(X+2Z)+2Z && (4)\\
W=X+2Z \text{ として} & && (5)\\
&= 3W+2Z && (6)\\
&= 2(2W+Z)+W && (7)\\
V=Z+W \text{ として} & && (8)\\
&= 2V+W=1 && (9)
\end{aligned}
$$

$V=t$ とおいて (9) に代入すると $2t+W=1$ となり、$W=1-2t$ を得る。
これらを (8) に代入して、$t=Z+(1-2t)$ となり、$Z=3t-1$ を得る。
さらに (5) は $1-2t=X+2(3t-1)$ となり、$X=3-8t$ を得る。
そして (2) は $3t-1=2(3-8t)+Y$ となり、$Y=19t-7$ を得る。
よって、一般解

$$(X,Y)=(3-8t,19t-7) \qquad t \text{ は任意}$$

を得る。

問題２

つぎの合同式の解を求めよ。

$$3x \equiv 5 \pmod{17}$$

解答

$$
\begin{aligned}
3X &\equiv 5 \pmod{17} && (1)\\
17X &\equiv 17 \pmod{17} && (2)\\
(2)-(1) \text{ より} & &&\\
14X &\equiv 12 \pmod{17} && (3)\\
(2,17)=1 \text{ だから両辺を } 2 \text{ で割って} & &&\\
7X &\equiv 6 \pmod{17} && (4)\\
(4)-(1) \text{ より} & &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4X &\equiv 1 \pmod{17} && (5)\\
\text{(5)} - \text{(1) より} \\
X &\equiv -4 \pmod{17} && (6)
\end{aligned}
$$

よって、

$$X \equiv -4 \pmod{17}$$

問題３

$$
\begin{cases}
x \equiv 4 \pmod 7 \\
x \equiv 2 \pmod 5
\end{cases}
$$

を求めよ。

解答

$x \equiv 4 \pmod 7$ より、

$$x = 7t + 4 \qquad (1)$$

とおける。これを $x \equiv 2 \pmod 5$ に代入して、

$$
\begin{aligned}
7t + 4 &\equiv 2 \pmod 5 \\
\text{両辺より 4 を引いて} \\
7t &\equiv -2 \pmod 5 && (2)\\
\text{また、} 7 \equiv 2 \pmod 5 \text{ より} \\
7t &\equiv 2t \pmod 5 \\
\text{であるので、これを (2) の左辺に用いて} \\
2t &\equiv -2 \pmod 5 \\
\text{両辺に 3 をかけて} \\
6t &\equiv -6 \pmod 5 && (3)\\
\text{(2)} - \text{(3) より} \\
t &\equiv 4 \pmod 5 && (4)\\
\text{よって } t = 4 + 5u \text{ と表せる。} \\
\text{これを (1) に代入して} \\
x &= 35u + 32 \\
\text{よって} \\
x &\equiv 32 \pmod{35} && (5)
\end{aligned}
$$

問題 4

$$\left(\frac{11}{77}\right)$$

を求めよ。

解答

$\gcd(11,77) \neq 1$ なので、$\left(\frac{11}{77}\right) = 0$