論　文

非線形 TRS の E 重なり性について

松浦　邦博[†]　大山口通夫[†]　太田　義勝[†]　小川　瑞史[††]

On the E-overlapping Property of Nonlinear Term Rewriting Systems

Kunihiro MATSUURA[†], Michio OYAMAGUCHI[†], Yoshikatsu OHTA[†], and Mizuhito OGAWA[††]

あらまし　項書き換えシステム (TRS) の重要な性質の一つに合流性があり, 最近, 非線形 TRS においては非 E 重なり性がその合流性と密接に関係していることが報告された．しかし，非 E 重なり性は一般に非可解な問題である．本論文では，まず「深さ保存」の概念を導入し， TRS が深さ保存的であるとき，非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを示す．非 ω 重なり性は判定可能な性質であることから，この結果を用いて，合流性を保証する判定可能な十分条件をいくつか導くことができることを示す．次に，右定項 TRS のクラスに限定すれば非 E 重なり性判定問題が可解であることを明らかにする．

キーワード　項書き換えシステム，深さ保存，非 E 重なり，非 ω 重なり，右定項 TRS

1.　まえがき

項書き換えシステム（以下, TRS と呼ぶ）は方向付けされた等式の集合と定義される．TRS は等式上での推論や項の簡単化などを行なうための計算モデルであり，これまで盛んに研究されてきた．TRS の重要な性質として合流性がある．TRS の合流性判定問題は一般に非可解であるが，停止性を満たす場合は判定可能であり，また，線形の場合は合流性を保証する十分条件がいくつか与えられている（例えば，非重なりな線形 TRS は合流性を満たす）．しかし，非線形かつ非停止 TRS の場合は，非重なりの場合でも合流性を満たさない時があるため より強い条件が必要となる．最近, TRS が非線形かつ非停止な TRS の幾つかの部分クラスに対して，非重なりよりも強い条件である非 E 重なりの条件を満たせば合流性を満たすという結果が報告されている [3], [4]．ここで，非 E 重なり性の概念は小川ら [1] によって与えられたもので，書き換え規則の左辺に対して，その真部分項の書き換えを許しても他の規則の左辺（または，その非変数部分）と重ならないとき，と定義される．しかし, TRS の非 E 重なり性を判定する問題は一般に非可解であり，また右定項 TRS のクラスに限定した場合の可解性については，これまで 未解決であった．

また，非 E 重なり性は非 ω 重なり性（循環的な無限項の代入を許して重なりがない）と密接な関係があり，小川ら [1] は「非 ω 重なりならば非 E 重なりである」と予想した．

本論文では，深さ保存的な TRS のクラスを導入して，「TRS が深さ保存的であるとき，非 ω 重なりならば非 E 重なりである（定理 1）」ことを示す．ここで，深さ保存的とは各規則 $\alpha \rightarrow \beta$ と β に出現する変数 x に対して x が β 中に出現する深さ $|u|$ （$\beta/u = x$）の最大値は α 中に出現する深さ $|v|$ （$\alpha/v = x$）の最大値以下であることをいう．定義より右定項 TRS は深さ保存的であるので，右定項 TRS に対して非 ω 重なり性は非 E 重なり性（従って，合流性）を保証する十分条件である．なお，非 ω 重なり性についてはほとんど線形時間で判定できるアルゴリズムが知られている [5]．

次に，本論文では「右定項 TRS において非 E 重なり性が判定可能である（定理 2）」ことを示す．この結果は，この問題が判定可能な項合流性問題に還元可能であることを示すことによって，得られる．

以下，本論文では， 2. で定理の証明に必要な項書き換えシステムに関する定義，および，記法について述べ， 3. で ω 単一化アルゴリズムについて述べる． 4. で定理 1 の証明， 5. で定理 2 の証明を述べる．

† 三重大学工学部情報工学科，津市
Faculty of Engineering, Mie University, Tsu-shi 514 Japan
†† NTT 基礎研究所，厚木市
NTT Basic Laboratories, Atsugi-shi 243-01 Japan

2. 定義と記法

本節では，定理の証明に必要な定義，および，記法について述べる．本論文では，以下に説明する用語，記法以外については [3] で用いられたのと同じ用語，記法を用いる．

［定義 1］(重なり) 規則対 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2$ は $\sigma(\alpha_1/u) = \sigma'(\alpha_2)$ となる代入 σ, σ' と出現 $u \in \mathcal{O}(\alpha_1)$ が存在するとき，「重なる」という．ただし，α_1/u は変数ではない．

［定義 2］(ω 重なり) 変数 $x \in V$ に対して，$x = f(y, x)$ のような循環的な参照を許す代入を ω 代入という．但し，$f \in F$ は 関数記号．規則対 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2$ は $\sigma(\alpha_1/u) = \sigma'(\alpha_2)$ となる ω 代入 σ, σ' と出現 $u \in \mathcal{O}(\alpha_1)$ が存在するとき，「ω 重なり」であるという．ただし，α_1/u は変数ではない．

［定義 3］(E 重なり) 規則対 $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2$ は ε- 不変な E- 系列 $\sigma(\alpha_1/u) \leftrightarrow^* \sigma'(\alpha_2)$ と代入 σ, σ' と出現 $u \in \mathcal{O}(\alpha_1)$ が存在するとき，「E 重なり」であるという．ただし，α_1/u は変数ではない．この E- 系列を「E 重なり系列」という．

重なる規則対は ω 重なり，かつ，E 重なりする規則対でもある．TRS は自明な場合を除いて重なる (ω 重なりする, E 重なりする) 規則対が存在しないとき，「非重なり」(「非 ω 重なり」，「非 E 重なり」) であるといい, 存在するとき「重なり」（「ω 重なり」，「E 重なり」）という．

［定義 4］(深さ保存的) TRS R は次の条件が成立するとき，「深さ保存的」という．

$$\forall \alpha \rightarrow \beta \in R \forall x \in Var(\beta)$$
$$MAX_{v \in \mathcal{O}_x(\beta)} |v| \leqq MAX_{u \in \mathcal{O}_x(\alpha)} |u|$$

すなわち，すべての変数について規則の右辺に現れる深さ（の最大値）は左辺に現れる深さ（の最大値）以下である．

［定義 5］(項 $M \in T(F, V)$ の高さ $h(M)$)

$$h(M) = MAX_{u \in \mathcal{O}(M)} |u|$$

［定義 6］(E- 系列 $\gamma : M_0 \leftrightarrow M_1 \cdots M_n$ の高さ $H(\gamma)$)

$$H(\gamma) = MAX_{0 \leqq i \leqq n} h(M_i)$$

$$\bar{H}(\gamma) = \begin{cases} H(\gamma) & (n \neq 0 \text{のとき}) \\ 0 & (n = 0 \text{のとき}) \end{cases}$$

$$H_{min} = \begin{cases} MIN\{\bar{H}(\gamma) | \gamma \text{は} E \text{重なり系列}\} \\ \quad (E \text{重なり系列が存在するとき}) \\ \infty \quad (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

TRS が重なるのと $H_{min} = 0$ は同値である．

［定義 7］(規則左辺の真部分項の集合)

$$PL_R = \{\alpha/u | \alpha \rightarrow \beta \in R, u \in \mathcal{O}(\alpha) - \{\varepsilon\}$$

［定義 8］(要素対集合) $\Gamma \subseteqq V \times T(F, V)$ を「要素対集合」という．要素対集合 Γ はそのすべての要素 (x, M) に対して $M \in PL_R$ のとき，「左要素対集合」であるという．要素対集合 Γ に対して自然数の多重集合 $size(\Gamma)$ と要素対集合 Γ_V, Γ_T を次のように定義する．

$$size(\Gamma) = \{h(M) | (x, M) \in \Gamma\}_m$$

$$\Gamma_V = \Gamma \cap V \times V, \Gamma_T = \Gamma - \Gamma_V$$

本論文では, 多重集合を $\{\cdots\}_m$ と表す．Γ_V から得られる変数間の同値関係を $\sim_{\Gamma_V}$ と表す（Γ_V が明らかな場合は, 単に $\sim$ と表す）．すなわち，$\sim_{\Gamma_V}$ は Γ_V の反射対称推移閉包である．

左要素対集合 Γ，代入 θ に対して，項対集合 $\Gamma\theta$ を以下のように定義する．

$$\Gamma\theta = \{(\theta(x), \theta(M)) | (x, M) \in \Gamma\}$$

また，$\forall (x, M) \in \Gamma \exists \gamma : \theta(x) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(M)$ のとき，$\Gamma\theta$ は「簡約可能である」という．項対集合の高さ $H(\Gamma\theta)$ を次のように定義する．

$$H(\Gamma\theta) = MAX_{(x,M) \in \Gamma} MIN_{\gamma : \theta(x) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(M)} \bar{H}(\gamma)$$

要素対集合 Γ は，ある ω 代入 σ が存在して，そのすべての要素 (x, M) に対して，$\sigma(x) = \sigma(M)$ となるとき，「ω 単一化可能」であるという．

3. ω 単一化アルゴリズム

本節では，本論文で ω 重なりの判定に使用する ω 単一化アルゴリズムについて述べる．

［定義 9］(O_Γ)

$$O_\Gamma(M, N) = MIN(O_{Var}(M) \cup O_{Var}(N))$$

ここで，$O_{Var}(M)$ は変数出現の集合 $U_{x \in Var(M)} O_x(M)$ である．MIN は関係 $\leqq$ のもとで極小な要素の集合を与える関数である．

［定義 10］(Common(M, N)) Common(M, N) は項 M，N の非変数部分の整合性をチェックするもので，次のように定義される．

$$Common(M, N) \Leftrightarrow$$
$$M[u \leftarrow c | u \in U] = N[u \leftarrow c | u \in U]$$

ここで，$U = O_\Gamma(M, N)$，c はある定数関数記号である．

［定義 11］ ($\Gamma(M,N)$)
$\Gamma(M,N)$ は Common(M,N) が true のときにのみ，次のように定義される．

$$\Gamma(M,N)=\{(M/u,N/u)|u\in O_\Gamma(M,N)\}$$

ただし，M/u が変数でない場合は $(N/u,M/u)$ を $\Gamma(M,N)$ の要素とする．従って，$\Gamma(M,N)$ は要素対集合である．

次に，項 M，N が ω 単一化可能かどうかを判定する ω 単一化アルゴリズムを示す．

[ω 単一化アルゴリズム]
入力：項 M,N
出力：M,N が ω 単一化可能であるとき成功，そうでないとき失敗で終了する．

```
if Common(M,N) then begin
    Γ := Γ(M,N)
    if ω-unify(Γ) then 成功で終了
    else 失敗で終了
    end
else 失敗で終了
```

ここで，**ω-unify** は次のように定義される．
[要素対集合 ω 単一化アルゴリズム **ω-unify**]
入力：要素対集合 $\Gamma(=\Gamma_T\cup\Gamma_V)$
出力：Γ が ω 単一化可能であるとき **true**，そうでないとき **false**.

```
while ∃(x,P),(y,Q) ∈ Γ_T
        [x ~_{Γ_V} y ∧ P ≢ Q] do
  begin
    if Common(P,Q) then begin
    Γ := (Γ − {(x̄, P̄)} ∪ Γ(P,Q) (*)
    end
    else return false
  end
return true
```

ここで，$(\bar{x},\bar{P})$ は

$$(\bar{x},\bar{P})=\begin{cases}(x,P) & (h(P)>h(Q)\text{のとき})\\(y,Q) & (\text{そうでないとき})\end{cases}$$

このアルゴリズムは文献 [5] とほぼ同じアルゴリズムである．文献 [5] では (*) の部分が「$(z,L)\in\Gamma(P,Q)$ かつ L が P の部分項である全ての (z,L) に対して，P の部分項 L を z に置き換えた項を $\bar{P}$ とし，$\Gamma:=(\Gamma-\{(x,P),(y,Q)\})\cup\Gamma(P,Q)\cup\{(x,\bar{P})\}$」としている．文献 [5] のアルゴリズムを一部変更したのは，Γ が常に左要素対集合であることを保証するためである．なお，(*) の実行により Γ が更新されるので，それに伴って，Γ_T と Γ_V も更新されると仮定する．

ω 単一化アルゴリズムが成功で終了した時点の Γ を M,N の ω 単一化の解集合と言う．解集合では次の ω 単一化可能 条件が成立する．
(ω 単一化可能条件)

$$\forall(x,P),(y,Q)\in\Gamma_T P\not\equiv Q\Rightarrow x\not\sim_{\Gamma_V} y$$

文献 [5] と同様の議論により，

M，Nがω単一化可能である $\Leftrightarrow$
M，Nのω単一化の解集合が存在する

が言える．また，この ω 単一化アルゴリズムが常に有限停止ことも容易に示すことができる．即ち，(*) の代入が $i(\geq 0)$ 回行われた後の Γ の内容を Γ_i とすると $size(\Gamma)\gg size(\Gamma_i)$ が成立する．ここで，$\gg$ は自然数の多重集合順序である．$\gg$ は 整礎であるので，(*) の代入が有限回で停止することが保証される．

4. 深さ保存的 TRS の E 重なり性と非 ω 重なり性

本節では，「TRS が深さ保存的であるとき，非 ω 重なりならば非 E 重なりである (定理 1)」ことを示す．重なる TRS は ω 重なり，すなわち，非 ω 重なりではないので，以下では重ならない TRS，すなわち，$H_{min}>0$ である TRS のみを考える．

［定義 12］ (並列 E 簡約)　E- 系列 γ : $M_0\overset{u_1}{\leftrightarrow}M_1\overset{u_2}{\leftrightarrow}\cdots\overset{u_n}{\leftrightarrow}M_n$ において $\forall i,j(1\leq i<j\leq n)u_i|u_j$ (即ち，$u_i\not\leq u_j$ かつ $u_j\not\leq u_i$) であるとき，M_0 と M_n は並列 E 簡約されるといい，$M_0\leftrightarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow M_n$ と表す．$\mathcal{R}(\gamma)$ で簡約の出現位置の集合 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ を表す δ : $N_0\leftrightarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow N_1\leftrightarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow\cdots\leftrightarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow N_k$ のとき，$\delta:N_0\leftrightarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow^* N_k$ と表し，並列 E 簡約列とよぶ．並列 E 簡約列の長さを $|\delta|_p=k$ と表す．また，$\mathcal{R}(\delta)$ を δ における簡約の出現位置の集合とする．

［補題 1］　深さ保存的な TRS R において，項 $M,N\in PL_R-V$，代入 θ,θ' で $\gamma:\theta(M)\leftrightarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow^*\theta'(N),H(\gamma)<H_{min}$ を満たす並列 E 簡約列 γ が存在するならば，次の二つの条件 $(A),(B)$ を満たす 並列 E 簡約列 δ が存在する．

$(A).\delta:\theta(M)\leftrightarrow^*\theta'(N),$
$H(\delta)\leqq H(\gamma)<H_{min},|\delta|_p\leqq|\gamma|_p$
$(B).\forall u\in\mathcal{R}(\delta)\exists v\in O_\Gamma(M,N)v\leqq u$

(証明) $\gamma:\theta(M)=N_0\leftrightarrow N_1\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow N_k=\theta'(N)$ とする．$(H(\gamma),|\gamma|_p)$ に関する帰納法で証明する．但し，順序は辞書的順序とする．$H(\gamma)=0$ かつ $|\gamma|_p=0$ のとき，補題は明らかに成立する．$(H(\gamma),|\gamma|_p)>(0,0)$ のとき，$U=\{u\in MIN(\mathcal{R}(\gamma))|\forall v\in O_\Gamma(M,N)v\not\leqq u\}$ とおく．$U=\phi$ の場合，$\delta=\gamma$ すれば 補題が成立する．それで $U\neq\phi$ とする．$U\neq\{\varepsilon\}$ のとき，各 $u\in U$ に対して並列 E 簡約列 $\gamma_u:\theta(M)/u=N_0/u\leftrightarrow N_1/u\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow N_k/u=\theta'(N)/u$ を考える．ここで，M/u と N/u が PL_R-V の要素であり，$H(\gamma_u)<H_{min},|\gamma_u|_p\leqq|\gamma|_p$ が成り立つ．帰納法の仮定よりすべての γ_u に対して補題が成立するので，γ についても補題が成立する．それで $U=\{\varepsilon\}$ の場合のみが残る．

(1)$|\gamma|_p=0$ の場合
明らか.

(2)$|\gamma|_p>0$ の場合
$I_R=\{i|N_i\xrightarrow{\varepsilon}N_{i+1}\},I_L=\{i|N_i\xleftarrow{\varepsilon}N_{i+1}\}$ とする．$\varepsilon\in\mathcal{R}(\gamma)$ より $I_R\cup I_L\neq\emptyset$ である．

（1） $I_L=\emptyset$ の場合
$i=MIN(I_R)$ とすると，$\gamma':\theta(M)=N_0\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow N_i\xrightarrow{\varepsilon}N_{i+1}$ は M が PL_R-V の要素であるので $H(\gamma')\leqq H(\gamma)<H_{min}$ となる E 重なり系列となり，仮定に矛盾するのでこの場合はありえない．

（2） $I_L\neq\emptyset$ の場合
$i=MAX(I_L),I'_R=\{j|j>i,j\in I_R\}$ とする．$I'_R=\emptyset$ の場合は，$\gamma':N_i\xleftarrow{\varepsilon}N_{i+1}\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow N_k=\theta'(N)$ を考えると，$I_L=\emptyset$ の場合と同様に仮定と矛盾するので，$I'_R\neq\emptyset$ でなければならない．$j=MIN(I'_R)$ とする．

並列 E 簡約列 $\gamma_1:N_i=\sigma(\beta)\xleftarrow{\varepsilon}N_{i+1}=\sigma(\alpha)\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow N_j=\sigma'(\alpha')\xrightarrow{\varepsilon}N_{j+1}=\sigma'(\beta')$ を考える．ε 不変な部分並列 E 簡約列 $\gamma_2:N_{i+1}\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow N_j$ は $H(\gamma_2)<H_{min}$ より E 重なりではないので，規則 $\alpha\to\beta,\alpha'\to\beta'$ は同じ規則でなければならない．$\alpha=f(L_1,\cdots,L_k)$ とする．但し，f はある関数記号．各 $l(1\leqq l\leqq k)$ に対して $\gamma'_{2l}:N_{i+1}/l\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow N_j/l$ は $H(\gamma'_{2l})<H(\gamma)$ より，N_{i+1}/l と N_j/l が共に PL_R-V の要素ならば，帰納法の仮定より，$(A),(B)$ の条件をみたす $\delta_{2l}:N_{i+1}/l\leftrightarrow^*N_j/l$ が存在する．$|\gamma_2|_p<|\gamma|_p$ なので γ_2 に帰納法の仮定を用いると，(A)，(B) の条件を満たす並列 E 簡約列 $\delta_2:N_{i+1}\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow N_j$ が得られる．δ_{2l} は (B) の条件を満たすので，従ってすべての $x\in Var(\alpha)$ について $\delta_x:\sigma(x)\leftrightarrow^*\sigma'(x)$ となる並列 E 簡約列 δ_x が存在する．

δ_x を用いて，$\delta_1:\sigma(\beta)\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow\sigma'(\beta)$ となる並列 E 簡約列を作ることができる．ここで深さ保存の仮定より $H(\delta_1)\leqq H(\gamma_1)$ であり，また，$\xleftarrow{\varepsilon},\xrightarrow{\varepsilon}$ の簡約がなくなるので $|\delta_1|_p<|\gamma_1|_p$ である．

γ においてその部分並列 E 簡約列 γ_1 を δ_1 に置き換えたものを γ' とする．$H(\gamma')\leqq H(\gamma)$ かつ $|\gamma'|_p<|\gamma|_p$ であるので γ' に帰納法の仮定を用いて条件 (A)，(B) を満たす並列 E 簡約列 δ が得られる． ∎

［系 1］ 深さ保存的な TRS R において，$M,N,\in PL_R-V$，代入 θ,θ' で $\gamma:\theta(M)\leftrightarrow^*\theta'(N),\bar{H}(\gamma)<H_{min}$ を満たす E- 系列 γ が存在するならば次の条件を満たす E- 系列 δ が存在する．

$(A).\delta:\theta(M)\leftrightarrow^*\theta'(N),\bar{H}(\delta)\leqq\bar{H}(\gamma)<H_{min}$
$(B).\forall u\in R(\delta)\exists v\in O_\Gamma(M,N)v\leqq u$

(証明) E 系列 $M\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow N$ は並列 E 簡約列 $M\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow N$ とみることができるので，補題 1 より明らか. ∎

［補題 2］ 深さ保存的な TRS R において，$M,N,\in PL_R-V$，代入 θ で $\gamma:\theta(M)\leftrightarrow^*\theta(N),\bar{H}(\gamma)<H_{min}$ を満たす E- 系列 γ が存在するならば，$Common(M,N)=true,\Gamma(M,N)\theta$ は簡約可能かつ $H(\Gamma(M,N)\theta)<H_{min}$ である．

(証明) 系 1 より明らか. ∎

［補題 3］ TRS が深さ保存的であるとする．左要素対集合 Γ において代入 θ で $\Gamma\theta$ が簡約可能であり，$H(\Gamma\theta)<H_{min}$ ならば，Γ は ω 単一化可能である．

(証明) $size(\Gamma_T)$ に関する帰納法で証明する．$size(\Gamma_T)=\{\}_m$ のときは明らかである．$size(\Gamma_T)\gg\{\}_m$ のときを考える．

（1） $\exists(x,M),(y,N)\in\Gamma_T,M\neq N,x\sim_{\Gamma_V}y$ の場合

$\Gamma\theta$ は簡約可能であるから，$\exists\gamma:\theta(M)\leftrightarrow^*\theta(x)\leftrightarrow^*\theta(y)\leftrightarrow^*\theta(N),\bar{H}(\gamma)<H_{min}$，補題 2 より $\Gamma_1=\Gamma(M,N)$ が定義でき，$\Gamma_1\theta$ は簡約可能かつ $H(\Gamma_1\theta)<H_{min}$ を満たす.

また，$(\bar{x},\bar{M})$ を $h(M)>h(N)$ ならば (x,M)，そうでなければ (y,N) とする．このとき，$\Gamma'=(\Gamma-$

$(\bar{x},\bar{M}))\cup\Gamma_1$ と置くと，$size(\{(\bar{x},\bar{M})\})\gg size(\Gamma_1)$ より $size(\Gamma)\gg size(\Gamma')$ となり，かつ，代入 θ で $\Gamma'\theta$ は簡約可能かつ $H(\Gamma'\theta)<H_{min}$ となるので，帰納法の仮定より，Γ' は ω 単一化可能である．その ω 代入を σ とすると $\forall(x',M')\in\Gamma_1\ \sigma(x')=\sigma(M'),\sigma(x)=\sigma(y)$，さらに，$(\bar{x},\bar{M})=(x,M)$ ならば $\sigma(y)=\sigma(N)$，そうでないとき $\sigma(x)=\sigma(M)$．よって，Γ も ω 単一化可能である．

（2） そうでない場合

要素対集合 ω 単一化アルゴリズムは true を返すので，Γ は ω 単一化可能である． ∎

［補題4］ 規則対 $\alpha_i\ \rightarrow\ \beta_i(i\ =\ 1,2)$ が代入 θ，出現 u で E 重なりであり，E 重なり系列 γ : $\theta(\alpha_1/u)\overset{*}{\leftrightarrow}\theta(\alpha_2)$ が $H(\gamma)=H_{min}$ を満たすとき，$Common(\alpha_1/u,\alpha_2)=true,\Gamma(\alpha_1/u,\alpha_2)\theta$ は簡約可能で $H(\Gamma(\alpha_1/u,\alpha_2)\theta)<H_{min}$ である．

(証明) γ が ε 不変より f をある関数記号とするとき，$\alpha_1/u=f(M_1,\cdots,M_n),\alpha_2=f(N_1,\cdots,N_n)$ となり，$\gamma_i:\theta(M_i)\leftrightarrow^*\theta(N_i),\bar{H}(\gamma_i)<H_{min}(1\leqq i\leqq n)$ である．従って，項 M_i,N_i が変数でない場合は補題2より $\Gamma_i=\Gamma(M_i,N_i)$ に対して $Common(M_i,N_i)=true,\Gamma_i\theta$ が簡約可能かつ $H(\Gamma_i\theta)<H_{min}$ である．また，$M_i\in V$ の場合は $\Gamma_i=\{(M_i,N_i)\}$，$N_i\in V$ のときは $\Gamma_i=\{(N_i,M_i)\}$ とおくと $\Gamma_i\theta$ が簡約可能かつ $H(\Gamma_i\theta)<H_{min}$ である．従って，$\Gamma=\cup_{1\leqq i\leqq n}\Gamma_i$ とおくと，$\Gamma=\Gamma(\alpha_1/u,\alpha_2)$ かつ $Common(\alpha_1/u,\alpha_2)=true$ であり，$\Gamma\theta$ は簡約可能，$H(\Gamma\theta)<H_{min}$ が成り立つ． ∎

［定理1］ TRS が深さ保存的であるとき，非 ω 重なりならば非 E 重なりである．

(証明) 補題3と補題4より E 重なりする規則対は ω 重なりする規則対でもあるので明らか． ∎

非線形 TRS が合流性を満たす十分条件として，

- 単純右線形かつ非 E 重なり (文献4)
- 強深さ保存的かつ非 E 重なり (文献6)

が知られている．ここで，「単純右線形」な TRS とは，全ての規則について，右辺が線形で左辺に2度以上現れる変数は右辺に現れない TRS をいう．また，「強深さ保存」な TRS とは，すべての規則のすべての変数について規則の右辺に現れる深さの最小値は左辺に現れる深さの最大値以下である TRS をいう．定義より強深さ保存的な TRS は深さ保存的である．

非 E 重なり性は一般に判定不能であるので，上記の十分条件は TRS が合流性を満たすかどうかの判定に一般的には利用することができない．しかし，定理1を上記の十分条件に適用することにより非線形 TRS が合流性を満たす判定可能な十分条件として次のものが得られる．

- 深さ保存的かつ単純右線形かつ非 ω 重なり
- 強深さ保存的かつ非 ω 重なり

5. 右定項 TRS の非 E 重なり性判定問題

本節では，「右定項 TRS の非 E 重なり性が判定可能である (定理2)」ことを示す．TRS が重なるかどうかは判定可能であり，重なる場合は非 E 重なりでないので，以下では重ならない TRS，すなわち，$H_{min}>0$ の TRS のみを考える．

［補題5］ 右定項 TRS R で E-系列 $\gamma:M\leftrightarrow^*N$ が $\bar{H}(\gamma)<H_{min}$ ならば，$M\downarrow N$ である．

(証明) 証明は文献[3]とほとんど同じであるが，文献[3]の命題 P(n)，Q(n)，S(n) と少し異なるところがあるので以下にそれを示す．そのために E-系列の高さを拡張して E-グラフ $G=(V_N,V_E)$ [3] の高さ $H(G)$ を $H(G)=MAX_{M\in V_N}h(M)$ と定義する．変更点は Q(n) と S(n) においては条件 $H(G)<H_{min}$ を追加したこと，P(n) においては条件 $H(\gamma)<H_{min}$ を追加したことのみである．

（1） 命題 Q(n)

E-グラフ $G=(V_N,V_E)$ に対して $||V_N||=n$ かつ $H(G)<H_{min}$ を満たすならば，V_N の項は全て合流する．

（2） 命題 P(n)

長さ n かつ $H(\gamma)<H_{min}$ を満たす ε 不変な E-系列 $\gamma:M_1\leftrightarrow M_2\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow M_{n+1}$ に対して，ある規則 $\alpha\rightarrow\beta$ と代入 σ が存在して $M_1=\sigma(\alpha)$ を満たすならば，全ての $i(1\leqq i\leqq n+1)$ について $M_i\rightarrow^*\beta$ が成立する．

（3） 命題 S(n)

極小 E-グラフ $G=(V_N,V_E)$ に対して，$||V_N||=n$ かつ $H(G)<H_{min}$ を満たすとき，$\sigma(\alpha)$ が V_N の要素で，かつ，$\beta\notin V_N$ を満たす規則 $\alpha\rightarrow\beta$ と代入 σ が存在するならば，全ての V_N の要素 M について $M\rightarrow^*\beta$ が成立する．

文献[3]の証明において，この新しい命題 Q(n)，P(n)，S(n) を用いて，「非 E 重なり」という仮定を用いている部分を「H_{min} より高さの小さい E 重なり系列は存在しない」という仮定に置き換えることにより同じ議論で証明できる． ∎

［定義13］(C_i)　項の集合 $C_i(i \geqq 0)$ を以下のように定義する．

$C_0 = \cup_{\alpha\to\beta\in R} sub(\beta)$

$C_{i+1} = C_i \cup (\cup_{\tau\in[V\to C_i],\alpha\to\beta\in R} sub(\tau(\alpha))))$

ここで，$sub(M)$ は項 M の部分項の集合，$[V \to C_i]$ は V から C_i へのすべての代入の集合を表す．例えば，$R = \{f(x) \to c\}$ のときは，$C_0 = \{c\}, C_1 = \{c, f(c)\}, C_2 = \{c, f(c), f(f(c))\}, \cdots$ となる．ここで f, c は関数記号である．

［定義14］(線形)　左要素対集合 $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_V$ が「線形である」とは，Γ_T に同じ変数が 2 回以上現れないことをいう．また，Γ_T に $k(\geqq 2)$ 回以上現れるすべての変数 x に対して，そのうちの $k-1$ 個を新しい変数 $x_1, \cdots, x_{k-1}$ に置き換えて Γ_T を再定義し，Γ_V に $\{(x, x_i)|i = 1, .., k-1\}$ を加えた左要素対集合を $\bar{\Gamma}$ で表す．$\bar{\Gamma}$ は線形である．

例．$\Gamma_T = \{(x, f(y), (z, g(x)\}$ 但し，$V = \{x, y, z\}$．このとき，Γ_T は線形ではない．$\Gamma'_T = \{(x, h(y, y))\}, \Gamma''_T = \{(x, f(x)\}$ も同様．

［定義15］$(y \mapsto x)$　$(x, M), (y, N) \in \Gamma_T, \exists z \in Var(M), z \sim_{\Gamma_V} y$ のとき，$y \mapsto x$ と記す．すなわち，ある代入 θ が存在して，$\Gamma\theta$ が簡約可能ならば $\theta(x) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M)[u \leftarrow \theta(y)] \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M)[u \leftarrow \theta(N)]$ が成り立つ．ここで，$z = M/u$．

［補題6］　右定項TRS R において，線形な左要素対集合 $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_V$ が条件

(1)　$\forall (x, M) \in \Gamma_T, x \mapsto y_1 \mapsto \cdots$ となる無限列が存在する

(2)　代入 θ で $\Gamma\theta$ は簡約可能でかつ $H(\Gamma\theta) < H_{min}$

を満たすならば，次の条件を満たす代入 θ' が存在する．

$(A).\Gamma\theta'$ は簡約可能でかつ $H(\Gamma\theta') < H_{min}$

$(B).\forall x \in Var(\Gamma)\theta'(x) \in C_0$

(証明) $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_V$ に現れる変数の集合 $V_i, (1 \leqq i \leqq 4)$ を次のように定義する．

$V_1 = \{x|\exists M\ (x, M) \in \Gamma_T\}$

$V_2 = \{y|\exists x, M\ (x, M) \in \Gamma_T, y \in Var(M)\}$

$V_{12} = V_1 \cup V_2$

$V_3 = \{z \in Var(\Gamma)|\exists x\ z \sim x, \exists x \in V_{12}\} - V_{12}$

$V_4 = \{z \in Var(\Gamma)|\exists x\ z \not\sim x, \forall x \in V_{12}\} - V_{12}$

Γ の線形性より，$V_i \cap V_j = \emptyset(1 \leqq i < j \leqq 4)$ であり，$Var(\Gamma) = \cup_{i=1}^4 V_i$ である．

証明は以下の順に行なう．

(i)　$x \in V_1$ に対して $\theta'(x) \in C_0$ である代入が存在する

(ii)　(i) ならば $x \in V_2$ に対して $\theta'(x) \in C_0$ である代入が存在する

(iii)　(i) かつ (ii) ならば $x \in V_3 \cup V_4$ に対して $\theta'(x) \in C_0$ である代入が存在する

以下において，S_i は変数の集合 $S_i = \{x \in V_i|\theta(x) \notin C_0\}$　$(i = 1..4)$ を表す．

(i) の証明

$m = \Sigma_{x\in Var(\Gamma)}|\theta(x)|, n = ||S_1||$ と置く．$< n, m >$ に関して $N \times N$ の辞書的順序に基づく帰納法で証明する．$n = 0$ のときは明らかである．$n > 0$ のときを考える．

$y_0 \in S_1$ とする．仮定より，$\exists_{y_0, y_1, \cdots} y_0 \mapsto y_1 \mapsto y_2 \mapsto \cdots$ が成立する．すなわち，各 $y_k (k \geqq 0)$ に対して，ある Γ_T の要素 (y_{k+1}, M_k) が存在して，$y_k \sim_{\Gamma_V} z_k, z_k = M_k/s_k, \gamma_k : \theta(y_{k+1}) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M_k) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M_k)[s_k \leftarrow \theta(y_k)]$．

(1)　$\exists k > 0 \exists u \in R(\gamma_k) u < s_k \cdots s_0$ が成立する場合

この条件を満たす k のうち最小のものを改めて k とする．また，$\gamma_k : \theta(y_{k+1}) = N_0 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow N_l = \theta(M_k)[s_k \leftarrow \theta(y_k)]$ とし，$N_{d-1} \overset{u_d}{\leftrightarrow} N_d (1 \leqq d \leqq l)$ のリデックス出現を u_d とする．$d = MAX(\{d|u_d < s_k \cdots s_0, 1 \leqq d \leqq l\})$ とする．H_{min} より高さの小さい E 重なり系列が存在しないという仮定から，その簡約は ある 規則 $\alpha \to \beta$ と代入 σ で $N_{d-1}/u_d = \sigma(\alpha) \to \beta = N_d/u_d$ となる．$s_k \cdots s_0 = u_d \cdot t$ と置けば $\delta : \beta/t \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(y_0), H(\delta) < H_{min}$ である．$\theta_1 = \theta[y_0 \to \beta/t]$ (即ち，$\theta_1(y_0) = \beta/t, y \neq y_0$ のとき $\theta_1(y) = \theta(y)$) と定義すれば，$\Gamma\theta_1$ は簡約可能で $H(\Gamma\theta_1) < H_{min}$ が成立する．なぜなら Γ の線形性より y_0 は Γ_T において 1 度のみ 出現し，$(y_0 M_0) \in \Gamma_T$ に対して $\gamma_0 : \theta(y_0) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M_0), H(\gamma_0) < H_{min}$ であり，かつ $\delta : \theta_1(y_0) \longleftrightarrow^* \theta(y_0), H(\delta) < H_{min}$ が成立するからである．θ_1 においては条件 (B) を満たさない変数の個数 $(||\{x \in V_1|\theta_1(x) \notin C_0\}||)$ が $n-1$ となるので，帰納法の仮定より，条件 (A)，(B) を満たす代入 θ' が存在する．

(2)　(1) の条件が成立しない場合

$l \geqq ||V_1||$ のとき，$\exists_{i,j}(0 \leqq i < j \leqq l) y_i = y_j$ が成

立する．

（a） $y_i \notin S_1$ (即ち, $\theta(y_i) \in C_0$) の場合

$\gamma : \theta(y_i)/s_{i-1}\cdots s_0 \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(y_0)$ かつ $H(\gamma) < H_{min}$ を満たすE系列 γ が存在する． $\theta_1 = \theta[y_0 \to \theta(y_i)/s_{i-1}\cdots s_0]$ と定義するとさきの議論と同様に, $\Gamma\theta_1$ は 簡約可能で, $H(\Gamma\theta_1) < H_{min}$, かつ 条件 (B) をみたさない V_1 の要素数が 1 減少する．従って，帰納法の仮定より (A), (B) を満たす代入 θ' が存在する．

（b） $y_i \in S_1$ の場合

$\gamma : \theta(y_j)/s_{j-1}\cdots s_i \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(y_i)(= \theta(y_j)), H(\gamma) < H_{min}$ を満たすE系列 γ が存在する． $\theta_1 = \theta[y_i \to \theta(y_j)/s_{j-1}\cdots s_i]$ と定義すると, $\Gamma\theta_1$ は 簡約可能で, $H(\Gamma\theta_1) < H_{min}$ かつ $\Sigma_{x\in V_{ar}(\Gamma)}|\theta_1(x)| < m$ となるので，帰納法の仮定より (A)，(B) を満たす代入 θ' が存在する．

(ii) の証明

Γ の線形性より $y \in S_2$ に対して, $(x, M) \in \Gamma_T$ かつ $y \in V_{ar}(M)$ をみたす x と M が 丁度1つ 存在する．(i) より $\gamma : \theta(x) \overset{*}{\leftrightarrow} \theta(M), x \in V_1, \theta(x) \in C_0$ が成り立っている． y の M 中の出現位置を u とするとき，

（1） $\forall v \in R(\gamma)\ v \not< u$ のときは， $\theta' = \theta[y \to \theta(x)/u]$ とおけば よい．

（2） $\exists v \in R(\gamma)\ v < u$ のときは， v を $v < u$ をみたす最大のリデックス出現 $MAX\{v \in R(\gamma)|v < u\}$ として，その簡約のうち 最右のものに 着目する． $H(\gamma) < H_{min}$ より, γ はE重なり系列ではないのでリデックス出現 v の 最右 簡約は右向き $(\sigma(\alpha) \to \beta)$ でなければならない．従って， $\theta' = \theta[y \to \beta/w]$ とおけばよい．ここで， $v \cdot w = u$.

(iii) の証明

変数 $z \in S_3$ についてはある $x \in V_1 \cup V_2, \theta(x) \in C_0$ が存在して, $x \sim z$ が成立するので， $\theta' = \theta[z \to \theta(x)]$ とおけばよい．

また， c を 任意の (0引数) 関数記号 $\in C_0$ とすると，すべての 変数 $y \in S_4$ に 対して $\theta' = \theta[y \to c]$ とおけばよい．従って補題6が成立する． ∎

［補題7］ 右定項TRS R において，線形な 左要素対集合 Γ が代入 θ で $\Gamma\theta$ が 簡約可能 かつ $H(\Gamma\theta) < H_{min}$ であり, さらに ω 単一化 可能条件をみたす ならば，次の条件を満たす代入 θ' が存在する．

$(A).\Gamma\theta'$ は簡約可能で $H(\Gamma\theta') < H_{min}$

$(B).\forall x \in V_{ar}(\Gamma)\theta'(x) \in C_{||\Gamma_T||}$

(証明) $||\Gamma_T||$ に関する帰納法で証明する． $||\Gamma_T|| = 0$ のときは明らか．

$||\Gamma_T|| = 1$ のとき， $\Gamma_T = \{(x, M)\}$ とする．補題6の条件(1)を満たせば，補題6より，この補題が成立する．補題6の条件(1)を満たさないとき， $c \in C_0$ を0引数関数記号とする． $\forall y \in Var(\Gamma)\ y \not\sim_{\Gamma_V} x$ ならば $\theta_1(y) = c$ とする．このとき， $\theta_1(M) \in C_1$ が成立する． $z \sim_{\Gamma_V} x$ を満たす任意の $z \in Var(\Gamma)$ に対して， $\theta_1(z) = \theta_1(M)$ とする．そのとき， $\forall(y, N) \in \Gamma\ \theta_1(y) = \theta_1(N)$．従って， $\Gamma\theta_1$ は簡約可能，かつ, $H(\Gamma\theta_1) < H_{min}$ が成立する．ゆえにこの補題が成立する．

$||\Gamma_T|| > 1$ のとき， $\Gamma_1 = \{(x, M) \in \Gamma_T|\forall(y, N) \in \Gamma_T\ \forall z \in Var(N)\ x \not\sim_{\Gamma_V} z\}$ とする．

$\Gamma_1 = \emptyset$ ならば $\forall(x, M) \in \Gamma_T\ \exists(y, N) \in \Gamma_T\ x \mapsto y$. 従って，補題6の条件(1)が成立する．ゆえに補題6よりこの補題が成立する．

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ のとき，

$$\Gamma_{V_1} = \{(y, z) \in \Gamma_V|\exists(x, M) \in \Gamma_1\ x \sim_{\Gamma_V} y\}$$

$$\Gamma' = \Gamma - (\Gamma_1 \cup \Gamma_{V_1})$$

とする．ここで， Γ_1 の定義と Γ が ω 単一化可能条件を満たすことより， $(\{x|(x, M) \in \Gamma_1\} \cup Var(\Gamma_{V_1})) \cap Var(\Gamma') = \emptyset$ が成立する．帰納法の仮定より，この補題の (A),(B) が成立する．すなわち， $\Gamma'\theta'$ は簡約可能で $H(\Gamma'\theta') < H_{min}, \forall x \in Var(\Gamma')\ \theta'(x) \in C_{||\Gamma'_T||}$.

$c \in C_0$ を0引数関数記号とする． $\forall(x, M) \in \Gamma_1$ に対して， $Var(M) - Var(\Gamma') \neq \emptyset$ ならば $\forall y \in Var(M) - Var(\Gamma')\ \theta_1(y) = c$ とする．($y \sim_{\Gamma_V} z$ かつ $z \in Var(\Gamma')$ を満たす z は存在しない．なぜなら， $y \sim_{\Gamma_V} z$ ならば $y \in Var(\Gamma_V)$ かつ $y \notin Var(\Gamma_{V_1})$．その結果 $y \in Var(\Gamma')$ となり矛盾が生じる．) $\forall z \in Var(\Gamma')\ \theta_1(z) = \theta'(z)$． そのとき， $\theta_1(M) \in C_{||\Gamma'_T||+1} \subseteqq C_{||\Gamma_T||}$． Γ(従って， Γ_1) が ω 単一化可能条件を満たすことより， $\forall(x, M) \in \Gamma_1\ \theta_1(x) = \theta_1(M)$． $x \sim_{\Gamma_V} z$ を満たす $\forall z \in Var(\Gamma_{V_1})$ に対して， $\theta_1(z) = \theta_1(x)$ とおけば $\Gamma_1 \cup \Gamma_{V_1}$ は簡約可能， $H((\Gamma_1 \cup \Gamma_{V_1})\theta_1) < H_{min}$ かつ $\forall x \in Var(\Gamma_1 \cup \Gamma_{V_1})\ \theta_1(x) \in C_{||\Gamma_T||}$．従って，この結果と帰納法の仮定を合わせることにより，この補題が成立する． ∎

［定義16］(Γ_i) 入力項 M, N に対して ω 単一化アルゴリズムが， ω-unify 中の **while** ループを $n(\geqq 0)$ 回

実行後，成功で終了したとする． while ループの $i(0 \leq i \leq n)$ 回目の実行で得られた要素対集合を Γ_i とする．ただし， $\Gamma_0 = \Gamma(M, N)$ である．

［補題 8］ （1） $\bar{\Gamma}_n\theta$ が簡約可能ならば $\Gamma_n\theta$ は簡約可能．

（2） $\Gamma_n\theta$ が簡約可能ならば $\Gamma_0\theta$ は簡約可能．

(証明)

（1） Γ_n から $\bar{\Gamma}_n$ を作る時に $x, y \cdots$ を $x_i, y_j \cdots$ と名前を変えたとする． $\theta(x_i) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(x), \cdots$ より， $\theta(x) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(\bar{M}) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(M)$ が成り立つ．

（2） 「$\Gamma_{i+1}\theta$が簡約可能 $\Rightarrow \Gamma_i\theta$が簡約可能」が $i = 0..n-1$ で成り立つことを示す． $\Gamma_{i+1} = \Delta \cup \{(y, N)\} \cup \Gamma(M, N), \Gamma_i = \Delta \cup \{(x, M), (y, N)\}$ より， $\theta(x) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(M)$ が言えればよい． $x \sim y$ より， $\theta(x) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(y) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(N) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(M)$ が成り立つ． ∎

［補題 9］ （1） $\Gamma_0\theta$ が簡約可能で $H(\Gamma_0\theta) < H_{min}$ ならば $\Gamma_n\theta$ は簡約可能で $H(\Gamma_n\theta) < H_{min}$．

（2） $\Gamma_n\theta$ が簡約可能で $H(\Gamma_n\theta) < H_{min}$ ならば $\exists\theta'\ \bar{\Gamma}_n\theta'$ は簡約可能で $H(\bar{\Gamma}_n\theta') < H_{min}$．

（3） Γ_n が ω 単一化可能ならば $\bar{\Gamma}_n$ は ω 単一化可能．

(証明)

（1） 「$\Gamma_i\theta$ が簡約可能で $H(\Gamma_i\theta) < H_{min}$ ならば $\Gamma_{i+1}\theta$ は簡約可能で $H(\Gamma_{i+1}\theta) < H_{min}$」が $i = 0..n-1$ で成り立つことを示せばよい． $\Gamma_{i+1} = \Delta \cup \{(y, N)\} \cup \Gamma(M, N), \Gamma_i = \Delta \cup \{(x, M), (y, N)\}$ より， $\Gamma(M, N)\theta$ が簡約可能，かつ， $H(\Gamma(M, N)\theta) < H_{min}$ が言えればよい． $x \sim y$ より， $\gamma : \theta(M) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(x) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(y) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(N), H(\gamma) < H_{min}$ が成り立つ．従って，補題 2 より $\Gamma(M, N)\theta$ が簡約可能，かつ， $H(\Gamma(M, N)\theta) < H_{min}$ が成り立つ．

（2） Γ_n から $\bar{\Gamma}_n$ を作る時に $x, y \cdots$ を $x_i, y_j \cdots$ と名前を変えたとする． $\theta' = \theta[x_1 \leftarrow \theta(x), \cdots, y_1 \leftarrow \theta(z), \cdots]$ とすれば明らかに成り立つ．

（3） $\bar{\Gamma}_n$ の作り方から明らか． ∎

［補題 10］ ω 重なりの規則対 $(\alpha_1/u, \alpha_2)$ に対して，その ω 単一化の解集合を Γ とする時，

$$
\begin{aligned}
&TRS\,R が E 重なり \\
&\quad \Leftrightarrow \exists\theta \in [V \rightarrow C_{||\bar{\Gamma}_T||}] \forall(x, M) \in \bar{\Gamma}\theta(x) \downarrow \theta(M)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

(証明)

($\Leftarrow$ の証明)

$\forall(x, M) \in \bar{\Gamma}_n\theta(x) \downarrow \theta(M)$

$\Rightarrow \bar{\Gamma}_n\theta$ は簡約可能 （明らか）

$\Rightarrow \Gamma_0\theta$ は簡約可能 （補題 8 より）

$\Rightarrow \theta(\alpha_1/u) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(\alpha_2)$ （明らか）

$\Rightarrow$ TRS R は E 重なり （E 重なりの定義より）

($\Rightarrow$ の証明)

TRS R が E 重なり

$\Rightarrow \exists\gamma : \theta(\alpha_1/u) \stackrel{*}{\leftrightarrow} \theta(\alpha_2), H(\gamma) = H_{min}$

（E 重なりと H_{min} の定義より）

$\Rightarrow \Gamma_0\theta$ は簡約可能， $H(\Gamma_0\theta) < H_{min}$， $\Gamma_0 = \Gamma(\alpha_1/u, \alpha_2)$

（補題 4 より）

$\Rightarrow \exists\theta'\ \bar{\Gamma}_n\theta'$ は簡約可能， $H(\bar{\Gamma}_n\theta) < H_{min}$， $\bar{\Gamma}$ は線形かつ ω 単一化可能条件を満たす

（補題 3 と補題 9 より）

$\Rightarrow \exists\theta'' \in [V \rightarrow C_{||\bar{\Gamma}_T||}]\ H(\bar{\Gamma}_n\theta') < H_{min}$

（補題 7 より）

$\Rightarrow \forall(x, M) \in \bar{\Gamma}_n\theta''(x) \downarrow \theta''(M)$

（補題 5 より） ∎

［定理 2］ 右定項 TRS において非 E 重なり性が判定可能である．

(証明) 補題 10 より次に示すアルゴリズムにより判定可能である．

TRS の非 E 重なり性判定アルゴリズム

入力：右定項 TRS R
出力： TRS R が非 E 重なりのとき **true**,
そうでないとき **false**
for 各 ω 重なり規則対 p **do**
  begin
    p の ω 単一化解集合を Γ とする．
    for 各代入 $\theta \in [V \rightarrow C_{||\bar{\Gamma}_T||}]$ **do**
      begin
        if 全ての $\bar{\Gamma}$ の要素 (x, M) に対して
          $\theta(x) \downarrow \theta(M)$
        then return false
      end
  end
return true

なお， $\theta(x) \downarrow \theta(M)$ は判定可能である [2]． ∎

6. むすび

本論文では, 深さ保存的の概念を導入することにより，TRS が深さ保存的であるとき，非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを明らかにした．また, 右定項 TRS の

非 E 重なり性判定問題が可解であることを明らかにした．なお，深さ保存の条件だけでは非 E 重なり性の判定は不能である．

今後の課題としては，定理 1 において「深さ保存的」という条件を取り除いて「非 ω 重なりならば非 E 重なりである」を証明することがあげられる．

文　献

[1] Ogawa M. and Ono S.:“On the Uniquely Converging Property of Nonlinear Term Rewriting System”, 情報処理学会、ソフトウェア基礎論研究会研究報告、pp.61-70(1989.5).

[2] Oyamaguchi M.:“The Reachability and Joinability Problems for Right-Ground Term-Rewriting Systems”, Journal of Information Processing, Vol.13, No.3(1990).

[3] 大山口，太田：“右定項 - 項書き換えシステムの合流性について”, 電子情報通信学会論文誌, D-I,J76-D-I,2,39-45(1993).

[4] 太田，大山口，外山：“単純右線形 - 項書き換えシステムの合流性について”, 電子情報通信学会論文誌, D-I,J78-D-I,3,263-268(1995).

[5] Alberto Martelli and Giranfranco Rossi:“Efficient Unification with infinite terms in logic programming”, ON FIFTH GENERATION COMPUTER SYSTEMS, pp.202-209(1984).

[6] M.Oyamaguchi and H.Gomi:“Some Results on the CR Property of Non-E-overlapping and Depth Preserving TRS's”, RIMS Kokyuroku 918,pp.150-159(1995).

（平成 x 年 xx 月 xx 日受付）

松浦　邦博

平 5 三重大学大学院修士課程 (電子工学専攻) 了．項書き換えシステムに関する研究に従事．現在，伊勢電子 (株) 勤務．

大山口通夫　（正員）

昭 52 東北大大学院博士課程了．工博．同年名古屋大学助手．昭 53 三重大学工学部助教授．平 2 同大教授．現在に至る．理論計算機科学，特にオートマトン・形式言語理論，代数的仕様記述項，項書き換えシステム，言語処理系，プログラム意味論などの研究に従事．情報処理学会，ソフトウェア科学会，EATCS 各会員．

太田　義勝　（正員）

昭 51 名大・工・電気卒．昭 53 同大大学院博士（前期）課程（情報工学専攻）了．同年三重大工学部助手．昭 55 名大情報処理教育センター助手．昭 60 同大大型計算機センター助手．平 2 三重大学工学部情報工学科助教授．現在に至る．工博．計算機科学，特に項書き換えシステム，言語処理系，分散システムに関する研究に従事．情報処理学会会員．

小川　瑞史　（正員）

昭 58 東大・理・数学卒．昭 60 同大大学院修士課程了（数学専攻）．同年ＮＴＴ武蔵野電気通信研究所入所．現在ＮＴＴ基礎研究所主任研究員．計算機科学，特に項書き換え系，関数型プログラムの解析・検証・合成などの研究に従事．情報処理学会，ソフトウェア科学会各会員．