第11回 3. の解答

(11.11)より $\mu=\mu_0$ の時

$$\varepsilon_s\varepsilon_0 + i\frac{\sigma}{\omega} = \frac{\varepsilon_0 \overbrace{c^2}^{=\frac{1}{\mu_0}}(k+i\alpha)^2}{\omega^2} \qquad ①$$

$$\varepsilon_s\mu_0\omega^2\varepsilon_0 + i\sigma\mu_0\omega = (k^2-\alpha^2) + 2ik\alpha$$

$$\begin{cases} \varepsilon_s\varepsilon_0\omega^2\mu_0 = k^2-\alpha^2 & ② \\ \sigma\omega\mu_0 = 2k\alpha & ③ \end{cases}$$

③を $k=\sigma\omega/2\alpha$ として②に代入

$$\varepsilon_s\varepsilon_0\omega^2\mu_0 - \left(\frac{\sigma\omega\mu_0}{2\alpha}\right)^2 + \alpha^2 = 0$$

$$\alpha^4 + \varepsilon_s\varepsilon_0\omega^2\mu_0\alpha^2 - \frac{\sigma^2\omega^2\mu_0^2}{4} = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{-\varepsilon_s\varepsilon_0\omega^2\mu_0 \pm\sqrt{\varepsilon_s^2\varepsilon_0^2\omega^4\mu_0^2 + \sigma^2\omega^2\mu_0^2}}{2}$$

$\alpha^2>0$より +を選択

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon_s^2\varepsilon_0^2\omega^4\mu_0^2+\sigma^2\omega^2\mu_0^2} - \varepsilon_s\varepsilon_0\omega^2\mu_0}{2}}$$

$$= \omega\sqrt{\frac{\varepsilon_s\varepsilon_0\mu_0}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon_s^2\varepsilon_0^2\omega^2}}-1\right)} \qquad ④$$

$k+i\alpha$ は金属中の電磁波の波数である。その電磁波の電場の空間部分は $\exp\{i(k+i\alpha)z\} = e^{ikz}e^{-\alpha z}$ となり $z=1/\alpha$ で $1/e$ となる。従って $1/e$ まで減衰する距離は④の逆数をとり

$$d_{1/e} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2c^2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon_s^2\varepsilon_0^2\omega^2}}-1\right)}} \qquad ⑤$$

$\sigma^2 \gg \varepsilon_s^2\varepsilon_0^2\omega^2$ の時は⑤は

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2c^2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_s\varepsilon_0\omega}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2c^2\varepsilon_0}{\sigma\omega}} \qquad ⑥$$

(a) $\sigma = 1/\rho = 5.88\times10^7\ [1/\Omega m]$

$$\varepsilon_s\varepsilon_0\omega = \varepsilon_s\frac{1}{4\pi\cdot1/4\pi\varepsilon_0}2\pi f = \varepsilon_s\frac{1}{\cancel{4\pi}\times9\times10^9[m/F]}\cancel{2\pi}\times10^6[s^{-1}]$$

$$= \varepsilon_s\times5.56\times10^{-5}\ [F/ms]$$

$[F/ms] = [1/\Omega m]$

$\sigma \gg \varepsilon_s\varepsilon_0\omega$

$$⑥\to\frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2c^2}{\sigma\,2\pi f\cdot4\pi(1/4\pi\varepsilon_0)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(3.0\times10^8\,[ms^{-1}])^2}{5.88\times10^7[\Omega^{-1}m^{-1}]\times3.14\times10^6[s^{-1}]\times4\times3.14\times9.0\times10^9[m/F]}}$$

$$= 6.56\times10^{-5}\sqrt{[m^2s^{-1}\Omega F]} = 6.56\times10^{-5}\,[m]$$

(b) (a)と3桁の違いなので $\sigma \gg \varepsilon_s \varepsilon_0 \omega$ は変わらない

$$⑥ \longrightarrow \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{(3.0\times10^{8}\,[\mathrm{ms^{-1}}])^2}{5.88\times10^{7}\,[\Omega^{-1}\mathrm{m^{-1}}]\times 3.14\times10^{9}\,[\mathrm{s^{-1}}]\times 4\times 3.14\times 9.0\times10^{9}\,[\mathrm{mF^{-1}}]}}$$

$$= 2.07\times10^{-6}\,[\mathrm{m}]、$$

$$(c)\quad \frac{\sigma}{\varepsilon_s \varepsilon_0 \omega} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_s 4\pi \varepsilon_0 f} = \frac{2\times 4.0\,[\cancel{\Omega^{-1}}\cancel{\mathrm{m}^{-1}}]\times 9.0\times\cancel{10^{9}}\,[\cancel{\mathrm{m}}\cancel{\mathrm{F}^{-1}}]}{80\times\cancel{10^{9}}\,[\cancel{\mathrm{s}^{-1}}]} = 0.9$$

$$⑤ \longrightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\pi\times10^{9}\,[\mathrm{s^{-1}}]\times\sqrt{\dfrac{80}{2\times(3.0\times10^{8}\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}])^2}\left(\sqrt{1+0.9^2}-1\right)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\times10^{9}\,[\mathrm{s^{-1}}]\times 1.24\times10^{-8}\,[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}]}$$

$$\fallingdotseq 0.0128\,[\mathrm{m}]$$