

電磁気演習 第12回目

問題2の結果より

$$\begin{aligned}
 \frac{E_{r0}}{E_{in0}} &= \frac{\cos \theta_1 - n \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + n \cos \theta_2} \\
 &= \frac{\cos \theta_1 - n \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}}{\cos \theta_1 + n \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} \\
 &= \frac{\cos \theta_1 - n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \theta_1}} \quad (\because k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = n \sin \theta_1)
 \end{aligned} \tag{1}$$

媒質2の屈折率 n が純虚数で虚部が正の時、 $n = ai$ (a : 正の実数) と表せるので、

$$\frac{E_{r0}}{E_{in0}} = \frac{\cos \theta_1 - ai \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + n \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} \sin^2 \theta_1}} \tag{2}$$

なお入射角 $\theta_1 = 0^\circ$ なので、

$$\frac{E_{r0}}{E_{in0}} = \frac{1 - ai}{1 + ai} \tag{3}$$

よってパワー反射率は、

$$\left| \frac{E_{r0}}{E_{in0}} \right|^2 = \frac{|E_{r0}|^2}{|E_{in0}|^2} = \frac{1 + (-a)^2}{1 + a} = 1 \tag{4}$$

である。

媒質内の電磁波の振動分布について、分散関係 $n\omega = ck_2$ に ai を代入すると、

$$k_2 = \frac{a\omega}{c}i \tag{5}$$

を得る。これを問題2で得られた電場と磁場の透過の式に代入する ($\theta_2 = 0$)、

$$\mathbf{E}_t = E_{t0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{a\omega}{c}z - i\omega t\right) \tag{6}$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{a}{c\mu_0}iE_{t0} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{a\omega}{c}z - i\omega t\right) \tag{7}$$

なお、媒質内のポインティングベクトル $\mathbf{S}$ は、 $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ の実部を考える。

$$\text{Re}(\mathbf{E}_t) = E_{t0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{a\omega}{c}z} \cos \omega t \tag{8}$$

$$\text{Re}(\mathbf{H}_t) = \frac{a}{c\mu_0}E_{t0} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{a\omega}{c}z} \sin \omega t \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t \\
 &= \frac{a}{c\mu_0}E_{t0}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{2a\omega}{c}z} \sin \omega t \cos \omega t \\
 &= \frac{a}{c\mu_0}E_{t0}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{2a\omega}{c}z} \sin \omega t \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{10}$$

ちなみにポインティングベクトルの時間平均 $\overline{\mathbf{S}}$ は $\overline{\sin \omega t \cos \omega t} = \frac{1}{2}\overline{\sin 2\omega t} = 0$ なので $\mathbf{S} = 0$