

<質問> 正則な複素関数 $w = u + iv$ の u 一定 v 一定の曲線が直交する理由はなぜですか？

<回答>

複素数 $w = u + iv$ が正則であるにはコーシーリーマンの条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \cdots \textcircled{1} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たさなければならない。

①に右から $\frac{\partial v}{\partial x}$ を掛けると

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\because \textcircled{2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。一方、

$$u(x, y) = C(\text{一定}). \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる曲線があるとする。その曲線の一点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ でテーラー展開すると

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。(2 次の微少量は無視) ③-⑤より

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot (\Delta x, \Delta y) = 0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

となり、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \cdots \textcircled{7}$$

は勾配 $(\Delta x, \Delta y)$ に垂直な法線となる。同様にしてある曲線 $v(x, y) = C(\text{一定})$ 上の一点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ での勾配の法線方向は

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \cdots \textcircled{8}$$

となる。⑥, ⑦に示したベクトルは内積が0となるときの、つまり、

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \cdots \textcircled{9}$$

となるとき垂直となる。これは③と一致するので、 w が正則であるとき u と v の法線は垂直となり、従ってそれらの曲線の接線も垂直に交わる。