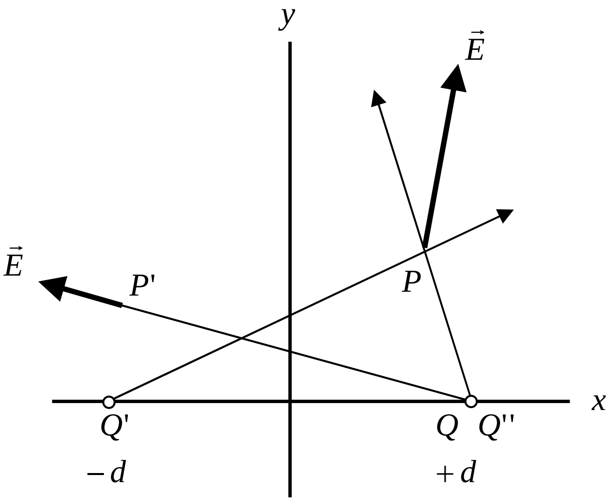
$Q' = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} Q$ の導出

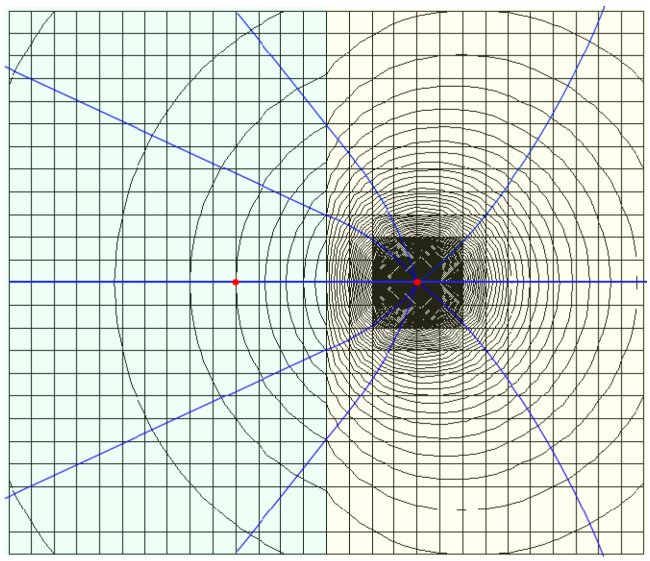
$x \leq 0$ の半無限領域に誘電率 ε の誘電体がある、x 軸上表面から d の距離の点 A に電荷 Q を置いた、このとき電位は真空中 $(x > 0)$ では Q によるものと A の鏡像点 A' に置かれた鏡像電荷 $-Q'$ によるものであるため

$$\phi_+(x, y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} - \frac{Q'}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}}\right\} \qquad (x > 0)$$

誘電体中 $(x < 0)$ では点 A に電荷 Q'' を置いたものになる

$$\phi_-(x, y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q''}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} \qquad (x < 0)$$





境界面での y 方向の電界は

$$E_{y(+0)} = -\left.\frac{\partial \phi_+}{\partial y}\right|_{x=+0} = \frac{(Q - Q')y}{4\pi\varepsilon_0 (d^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (x > 0)$$

$$E_{y(-0)} = -\left.\frac{\partial \phi_-}{\partial y}\right|_{x=-0} = \frac{Q'' y}{4\pi\varepsilon_0 (d^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (x < 0)$$

境界面 $x = 0$ では場の接続条件を満たすため $\vec{D}_\varepsilon = \vec{D}_{\varepsilon 0}$ となり、これを用いると $Q'' = Q - Q'$ となる。

境界面での x 方向の電界は

$$E_{x(+0)} = -\left.\frac{\partial \phi_+}{\partial x}\right|_{+0} = -\frac{(Q+Q')d}{4\pi\varepsilon_0\left(d^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (x>0)$$

$$E_{x(-0)} = -\left.\frac{\partial \phi_-}{\partial x}\right|_{-0} = -\frac{Q''d}{4\pi\varepsilon_0\left(d^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (x<0)$$

接続条件より $\varepsilon_0 E_{x(+0)} = \varepsilon E_{x(-0)}$ なので $\varepsilon(Q+Q') = \varepsilon Q''$ となり $Q'' = Q - Q'$ より

$$\therefore \quad Q' = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}Q \qquad Q'' = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}Q$$