

数理アプローチ入門

山本知幸

ver 0.2

Chapter 0

はじめに

0.1 この講義の目的

この講義の目的は、数学の基礎から駆け足で、修士論文のための研究に必要な「道具」を身につけることである。まず、数の扱いに慣れ、数を使いこなし、数を求められるようになることである。前半では数と統計など数量の見方を、後半では漸化式や微分方程式など数量の作り方を講義する。

数理科学は、数や量をもとにものごとの理(ことわり)を考える学問である。その基本の一つとなる数学は、高度に抽象化された体系を持っているため、最初は分かりにくいのが、一度理解した上で実際の問題との対応をつけられるようになると、非常に強力な道具となる。

そのために、高校数学の範囲よりもさかのぼって基礎的な部分を見直すことが重要である。ただし、すべてを深くやり通すだけの時間はないので、エッセンスのみを練習問題を通じて身につけることにしたい。また、学部で理数系の授業をとった受講者には復習と落ち穂拾いという位置づけになるが、基礎的なことほど意外と忘れがちであるということに注意されたい。

本講義では、駆け足で進めるために厳密な定義付け等は紹介しない。人類は、最初の講義で触れる0(ゼロ)、負の数、無理数を認めるのにも数世紀を要し、それぞれ深く考え出すときりがないからである。それぞれの話題に関し興味を持った受講者は、気軽に声をかけて欲しい。参考文献等を紹介する。

0.2 評価基準

レポートと期末試験により評価する。各50%の比率とする。

レポートは随時配布資料中に含まれる。原則として翌週の授業終了時までに

提出のこと。なお、インターネットから (例えば Wikipedia など) の丸写しが発見された場合はそのレポートの点を無効とする (参考にするのは構わないが、自分の言葉で書くこと)。

0.3 この講義で触れないこと

この講義では、数の塊を扱うことに焦点を置いている。そのため、当然のことながら数学のすべての領域を紹介することはできない。この講義の範囲外であるが重要と思える分野を挙げておく。参考書例も挙げてある。

- 数学のその他の分野

- 論理学

- 論理的に考えることは、研究するための能力の基本である。

- 野矢茂樹「入門! 論理学」中公新書 2006

- 野崎昭弘「詭弁論理学」中公新書

- 幾何学

- 形の学問であるが、図形的に考えるセンスは多くの局面で応用可能である。

- 微分・積分

- 極限操作を理解することは、数学という抽象化された世界への最大の障壁である。しかし、それゆえ一度マスターしてしまうと強力な道具となる。

- ラング「解析入門」岩波書店

数学全般に関する入門書としては、

志賀浩二「数学が生まれる物語」シリーズ 岩波書店

を挙げる。

- 物理学

- 古典力学

- 統計力学・熱力学

- 都筑卓司「マックスウェルの悪魔」講談社ブルーバックス

- 電磁気学

- 量子力学

物理学全般に関する参考書としては、
砂川重信「物理の考え方」シリーズ 岩波書店
を挙げる。

- 科学のその他の分野

- 化学

- 生物学

これらに関しては、数理科学の範囲を離れるが、微分方程式や統計が多い
に活用される分野であることを記憶に留めておきたい。

- (付録) ドキュメンテーション

文書作成なくして研究は完成しない。
木下是雄「理科系の作文技術」中公新書
は一読されたい。

Chapter 1

数・量・単位・次元および比較

数理学において、数は基本である。中学校の数学で習うような事柄でもあるが、まずその復習からはじめる。

数というと、単なる「1」よりも「1個」「1m」「1万円」などの単位がついた値を思い浮かべるかもしれない。しかしそれらは「量」である。数とは、単位を抜きにして抽象化された量のことを指す。

何故抽象化するかというと、その方が都合がいい場合があるからである。数の演算など、いちいち単位ごとに別のルールを作っていたら、覚えるのが大変である¹。むしろ、抽象化して一般的なルールを作ってしまう、応用する場合ごとに存在する例外を覚えた方が便利である²。

本章では、まず最初に様々な数や量の概念からはじめて、演算規則まで概観することにする。

1.1 数

一口に数と言っても、いくつかに分類することができる。

- 自然数
1以上の整数。素数(その数自身および1以外では割り切れない数)は自然数に含まれる。ものを数えるのに適した数。
- 整数
 - 正の整数
自然数のこと。つまり自然数は整数に含まれる。

¹例えば、いまだに時間は60進法であるなど面倒である。

²長さや個数には負の数が使えないなど。

- 0

ゼロ。空であることを示す。位取りを表すのに都合が良い以外にも、様々な数の上での操作に便利である。インドで発見されたとされている。現代人からするとあって当たり前の数である。しかし、ヨーロッパ文明のように、もともとゼロをもたない文明もあることから、抽象的な概念であることがいえる。

- 負の整数

「-」マイナス符号をつけて表す。

● 実数

- 有理数

整数を含み、有限な長さで記される小数および分数で表される数。
 $1/3=0.3333\dots$ などの循環小数を含む。

- 無理数

$\pi, e, \sqrt{2} = 1.4142135\dots, \sqrt{3} = 1.7320508\dots$ など、小数の形に表現して規則性がない数。

● 虚数

$i = \sqrt{-1}$ を単位とした実数。

● 複素数

実部 (実数) と虚部 (虚数) の和からなる数。複素平面と呼ばれる 2 次元平面上で表すこともある。

例: $1 + 2i$

1.1.1 数の比較

実数は数直線と呼ばれる1次元空間(線のことをさす)上の点として表現することができる。

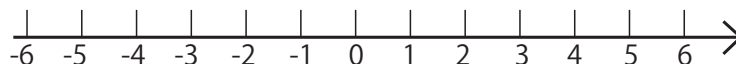


Figure 1.1: 数直線の例

数直線のポイントは、「単位長=長さ1」が明確になるように描くことである。

無理数は、近似的に表現する。ペン先より細かい精度でプロットする必要はない。目安として、最小目盛りの1/10程度の精度でよい。試しに、 $\pi = 3.141592\dots$ を3.1として上の数直線上にプロットせよ。なお、モノサシや電流計などアナログの測定機器では、最小目盛りの1/10まで目分量で読み取るのが測定の基本である。

無理数の近似

例えば、 $\sqrt{7}$ の近似値を考える。 $a < b$ (ただし $a \geq 0$) のとき $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ であるから、 $\sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8}$ である。

$$\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2)$$

$\sqrt{2} = 1.41$ 、 $\sqrt{3} = 1.73$ を用いると、

$\sqrt{6} = 2.44$ 、 $\sqrt{8} = 2.82$ であるから、 $\sqrt{7}$ はこの間の値をとることがわかる。

挟み撃ち法

逆に、ある無理数を近似したければ、挟み撃ちにする方法により可能である。例えば、 $\sqrt{7}$ の例では、正しい値は $[2.44, 2.82]$ の区間にあることがわかる。おおざっぱに見当をつけて、 $2.6^2 = 6.76$ 、 $2.7^2 = 7.29$ である。2.65、2.67、と2乗すると7になる数を挟み、その間隔を狭めていくことで、より精度を上げていくことができる。

馬鹿みたいに単純な方法に見えるが、直接的に答えのわからない値を求めるために一般的に使われている方法である。興味を持った人は「ニュートン法」や「モンテカルロ法」について調べてみるといい。また、このような作業には計算機を使用すること。PC上では Octave など高機能な数学計算用のアプリケーションプログラムが開発されている。

1.1.2 Octave 最初歩

では、Octave を実際に使ってみよう。Octave の最も簡単な利用法は電卓としての使い方である。

```
octave-3.0.0:> (3+4+5)/100
ans = 0.12000
octave-3.0.0:> (3+4)+5/100
ans = 7.0500
octave-3.0.0:> sqrt(3)
ans = 1.7321
```

括弧 () を使って数式通りの計算ができる。また、 $\text{sqrt}(x)$ は、 x の平方根を求める関数である。

練習問題

1. 上に挙げた数の概念それぞれについて、例を 5 個ずつ挙げよ。
2. 自然数と整数と実数の関係をベン図により示せ。
3. 上で挙げた数を数直線上に表現せよ。ただし複素数を除く。

1.1.3 数に関する研究

以上では数に関して概観した。さて、数学とは日本語では数の学問と書くが、数自体は現在研究の対象になっているだろうか。数に関する研究をする分野は数論 (number theory) と呼ばれており、数学の大きな柱の一つであると言ったら驚くかもしれない。この分野での近年の話題はフェルマーの最終定理の証明だろう。

これは、「3以上の自然数 n について、 $x^n + y^n = z^n$ となる自然数 (x, y, z) の組み合わせがない」というものである。 $(n = 2)$ なら、ピタゴラスの定理により $3^2 + 4^2 = 5^2$ などが容易に挙げられ、定理を反証できる。このように、定理を反証する例を反例と呼ぶ)

この証明を簡単に紹介するのは筆者の力量では無理なので、以下の本を紹介する。

サイモン・シン「フェルマーの最終定理 ピュタゴラスに始まり、ワイルズが証明するまで」青木薫訳 新潮社 2000年

原書: Simon Singh, "Fermat's Enigma: The Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem" Anchor Books 1998 (paperback)

また、素数自体の研究も歴史が古く、最近出版された中では以下の書を挙げる。読まなくても素数だけで本が1冊書けるほど豊かな内容を含んでいることを記憶に留めておくと良い。

デビット・ウェルズ「プライムナンバーズ」伊知地宏監訳 さかいなおみ訳 オライリージャパン 2008

原書: David Wells "Prime Numbers – The Most Mysterious Figures in Math" John Wiley & Sons 2005

さらに数の研究の応用としては、暗号が挙げられる。インターネットのセキュリティと密接な問題を持つので、興味のある向きはぜひとも読みたい。読み物としては「フェルマー」と同じ著者の書がわかりやすい。

サイモン・シン「暗号解読-ロゼッタストーンから量子暗号まで(上・下)」青木薫訳 新潮文庫

原書: Simon Singh, "The Code Book: The Science of Secrecy from Ancient Egypt to Quantum Cryptography" Anchor Books 2000 (paperback)

1.1.4 数の計算

a 、 b 、 c 、 d を任意の数とする。これらの数の間で、以下のルールが常に成り立つ。便宜上、ルールに番号をつけて示した。

ユークリッドの公理

1. $a = b$, $a = c$ ならば $b = c$
2. $a = b$, $c = d$ ならば $a + c = b + d$
3. $a = b$, $c = d$ ならば $a - c = b - d$

これらは、移項により方程式を解くときなどに活用されている。乗法 (掛け算) は加法 (掛け算) の繰り返しによって定義されるために、

乗法の場合

4. $a = b$, $c = d$ ならば $ac = bd$

を使ってよい。さらに除法 (割り算) も、

除法の場合

5. $a = b$, $c = d$ かつ $c \neq 0$ ならば $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

結合法則

6. 足し算 $a + (b + c) = (a + b) + c$
7. 掛け算 $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

これらが便利なのは、例えば順序を入れ替えると計算が楽な場合である。

分配法則

8. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

練習問題

1. 引き算は結合・分配の2法則を満たさない。簡単な例で確かめよ。
2. 割り算は結合・分配の2法則を満たさない。簡単な例で確かめよ。

3. $(a + b)^2$ を上のルールを順次適用することで展開せよ。
4. 1次方程式の一般型 $ax + b = 0$ を x について解け。途中を省略せず、どのルールを適用したか示せ。
5. (理系向き) 何故 0 で割ってはいけないか？

1.2 量

単位のついた数を量と呼ぶ。とくに、計測して得た数値はすべて量である。数がものを数えることから始まったとすれば、歴史的には量の方が古い。

練習問題

1. 知っている単位を列挙し、それぞれについて用途を記せ。

量の用途には比較と交換をすることがある。

単位の違うもの同士を加えることは出来ない。

1.2.1 粗い見方と細かい見方

例 1 ミカン 2 個とリンゴ 5 個、全部で何個？

例 2 半分痛んだリンゴ 2 個ときれいなリンゴ 3 個、全部で 5 個。
(リンゴ 5 個分の値段がついていたら、納得しますか？)

例 3 水 1l とリンゴ 2 個全部でどれだけ？

練習問題

上で示した例について、それぞれどんな粗い見方をしたら計算が成立してどのような答が得られるか。

1.3 単位、比較、次元

1.3.1 単位

最も基本的な単位を下に記す。

m	メートル	長さ
kg	キログラム	重さ (質量)
s	秒	時間
A	アンペア	電流

Table 1.1: 基本的な単位

なぜこれらの単位が基本的かという、この4つの単位により多くの単位を導出することができるからである。これをSI単位系 (ないしMKSA単位系) と呼ぶ。なぜ質量にだけ「k」(1000を表す) がついているかという、単に「g(グラム)」が扱いにくいからという歴史的な理由である。なお、SI単位系には上に挙げた4つの他に温度 ([K])、物質質量 ([mol])、光度 ([cd]) があるが、この講義では触れない。

なお、本講義では変数との混同を防ぐため、単位には [] をつけて表す。比率など、もともと数としてしか表現しようのないものには単位はつかない。これを無次元 (の量) と呼ぶ。なお、個数も無次元である。

SI単位系により表現された「組立単位」を下に記す。

量	名称	記号		次元
力	ニュートン	N		$m \cdot kg/s^2$
圧力	パスカル	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot /s^2$
エネルギー	ジュール	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg/s^2$
仕事	ジュール	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg/s^2$
熱量	ジュール	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg/s^2$
仕事率	ワット	W	J/s	$m^2 \cdot kg/s^2$
電圧	ボルト	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot / (s^3 \cdot A^{-1})$

Table 1.2: SI組立単位。理化学事典 (岩波書店刊) を参考にした。

その他にも頻出する単位には表 1.3 のようなものがある。

キログラム重とは、地球の重力が及ぼす力である。例えば、体重計は質量ではなく、体重計にかかる力を計測する。力とは質量と加速度の積である。地球の及ぼす重力加速度を一定値 ($9.8 [m/s^2]$) とすると、質量がわかる。

量	名称	記号		
速度	キロ/時	km/h		
速度	メートル/秒	m/s		
面積	平方メートル	m^2		
圧力	バール	bar	$10^5 Pa$	
重さ	キログラム重	kgw	約 9.8 N	約 $9.8m \cdot kg/s^2$

Table 1.3: その他重要な単位。理化学事典 (岩波書店刊) を一部参考にした。

P	10^{15}	peta
T	10^{12}	tera
G	10^9	giga
M	10^6	mega
k	10^3	kilo
h	10^2	hecto
da	10^1	deca
d	10^{-1}	deci
c	10^{-2}	centi
m	10^{-3}	mili
μ	10^{-6}	micro
n	10^{-9}	nano
p	10^{-12}	pico
f	10^{-15}	femto

Table 1.4: SI 接頭語。理化学事典 (岩波書店刊) を参考にした。

桁の違う単位を表現するのに、以下の接頭語を用いる。

現在天気予報では hPa (ヘクトパスカル) と、耳慣れない接頭語 h を用いるが、これはそれ以前 mbar (ミリバール) を使っていた名残である。可能な限り SI 単位系で表現する、と国際的に決められたが、天気予報など間違えると命に関わるため、慣れ親しんだ桁数に合わせたものである。ちなみに、1 気圧は 1013 hPa である。

1.3.2 比較

「量」の項でも触れたように、単位の異なるものを足すことは出来ない。ただし、一見違うように思えるものでも、次元が一致していれば比較することができる(後述)。また、単位が同じでも、異なる種類の量の扱いには注意が必要である。例えば、エネルギーと仕事は同じ単位であり、比較することは可能である。しかし、物理的には別物であるため、実世界においてそれらを 直接置き換えることはできない。

1.3.3 有効数字

では、1[g] と 100[kg] の和はどうだろう。多分 100001[g] と答えたくなるだろう。これは数学的(理論的)には正しいが、実験的には正しくない場合がある。

実験的には、定数以外はすべて測定された値である。測定には必ず誤差がある。100[kg] という値も、精度が 0.1[kg] のはかりであれば 99.9[kg] と 100.1[kg] の間の値でしかない。つまり、1[g] を足そうとしてもそれは誤差の範囲である。

精度を明示的に表現するために、実験では有効数字という概念を用いる。数値は 1.000×10^2 [kg] のように、1 以上 10 以下の実数と位取りを表す指数によって表現される。有効数字とは、実数部の桁数を指す。数値を有効数字で表現するためには、指定された桁数以降は四捨五入する。この例では有効数字 4 桁となっている。つまり、 $9.9995 \times 10^1 = 1.000 \times 10^2 = 1.0004 \times 10^2$ とみなされる。左右の項は、有効数字 5 桁であることに注意せよ。無理数の項で述べた近似値と同様に、測定値はすべて「真の値」に対する近似値であると考えるとよい。

1.3.4 次元

本来、単位の異なるもの同士を比較することは出来ない。しかし、一見別の名前がついていても、実は「同じもの」である場合がある。この基準を「次元」と呼ぶ。SI 単位系の基本単位から導出された組立単位の表(表 1.2)の右端の項が次元である。

例

ニュートンの運動方程式、(力=質量 x 加速度) $F = m \cdot a$ を例にとる。

左辺 = $kg \cdot m/s^2$ (表 1.2 より)

右辺 = 質量 (kg) x 加速度 (m/s^2) = $kg \cdot m/s^2$ = 右辺。

単位の次元と空間の次元

なお、「空間の次元」と単位の次元は同じ名前であるが異なる概念である。空間的な次元については、次章で触れる。

練習問題

- アインシュタインが一般相対論の帰結として求めた数式、 $E = mc^2$ を次元解析で検証せよ。
- 気圧が 1.0×10^3 [hPa] のとき、一辺が 10[cm] の正方形にはどれだけの力がかかっているか求めよ。

1.4 レポート問題 1

下から 3 問以上の問題を選び、各問題につき解答せよ。図書、論文やネット検索を参考に使用するのは構わないが、参考にした文献は明記すること³。

1. $\sqrt{2} = 1.41, \sqrt{3} = 1.73, \sqrt{5} = 2.23$ を用いて、10 から 30 までの平方根 ($\sqrt{10}, \sqrt{11}, \dots, \sqrt{30}$) の近似値をそれぞれもとめよ。(ヒント: 求めやすい数から求める)
2. 素数の効率的な判定方法を調べよ。
3. 経済で負の数にマイナスでなく $-$ を使う理由を調べよ。
4. π の歴史について述べよ。
5. SI 単位系の、それぞれの単位の決定方法を調べよ。現在だけでなく、歴史的にどのように決め方が変わったかもしらべること。
6. 2 次方程式の一般型 $ax^2 + bx + c = 0$ を x について解け。途中を省略せず、pp.12 に示したルールを適用したか示せ。(平方根の適用は、ルールの外であるので示さなくてよい)

また、授業の感想、疑問点等あれば付記のこと。(歓迎するが点数には関係しない)。

³不必要に大きな文字、行間字間、不自然に大量の参考文献リストで埋める手法は推奨しない。減点の対象である

1.5 数値とベクトル

前章までに述べた数値というものは単一の成分 (= 数字 1 個) からなる。しかし、これだけでは不都合が生じることは明らかである。日常生活においてすら、数値のみで困るはずである。

例えば道案内を考えてみよう。

「xx までいきたいんですけど」

「あと 200m です」

では、大概の場合意味をなさない。自分で道を聞く立場になってみると、距離 (= 目的地までの長さ) だけでは意味をなさないことは明らかだ。必要なのは、距離と方向である。

向きのある量を考えるのに、括弧「 $()$ 」でくくった数の組を用いる。これをベクトルと呼ぶ。ベクトルとは「矢」を意味する (つまり 1 方向に飛ぶものであるという比喻から)。

$(1,3)$, $(-1,1)$, $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, (x,y) は 2 次元のベクトル、

$(1,3,2)$, $(-1,0,1)$, $(\sqrt{3}/2, 1/2, \sqrt{2})$, (x,y,z) は 3 次元のベクトルである。

ここで、 $()$ の中の値の数が次元に相当する。最もイメージしやすいベクトルの例は、座標と相対位置であろう。2 次元空間上では、位置を 2 つの数字の組として表現できる。多く目にするのは、下に示した直交座標系である。

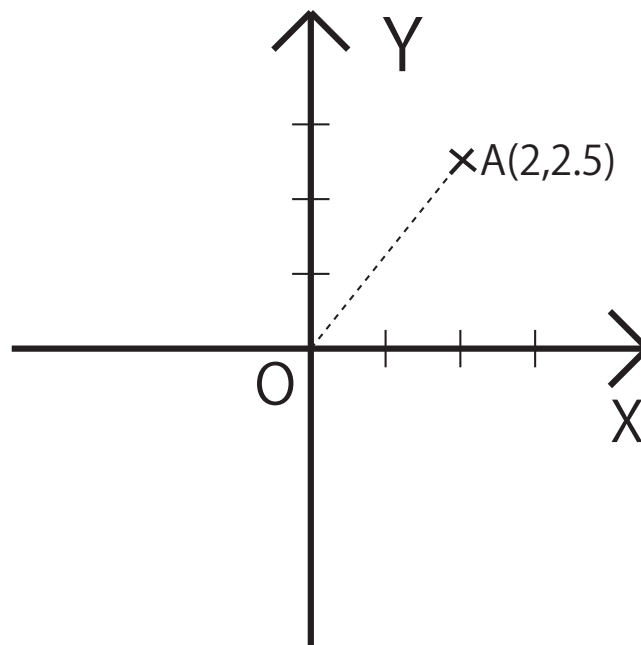


Figure 1.2: 直交座標系

座標系では、任意のベクトルはそれぞれただ一つの点を表し、任意の点はただ一つのベクトルしか持つてはならない。つまり、ベクトルと点の位置が「一意に決まる」という。そのためには原点と方向と距離の単位を決めなくてはならない。

直交座標系では、水平と垂直の2本の直交した軸とその交点を原点とし、それぞれの軸上での位置を求め、数の組として表す。軸が必ずしも直交している必要はなく、座標上の点と位置ベクトルの関係が一意に決まれば軸は任意に決めることができる。

ベクトルの大きさ(長さ)は、始点と終点の間の距離により求まる。ベクトル (a,b) の大きさは $\sqrt{a^2 + b^2}$ であり、ベクトル (a,b,c) の大きさは $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ である。なお、大きさが1のベクトルを単位ベクトルと呼ぶ。これを用いて座標系は、原点および基準となる軸と方向が同じで長さが1のベクトルにより定義することができる。このために用いられる単位ベクトルを方向ベクトルと呼ぶ。直交座標系における方向ベクトルは、

$$\mathbf{e}_x = (1, 0) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{e}_y = (0, 1) \quad (1.2)$$

である。なお、3次元ではベクトルは三つの数の組で表し、方向ベクトルは3個必要である。

ベクトルの表記は、太字 \mathbf{x} , \mathbf{a} , \mathbf{b} を使う場合と上に矢印をつけて \vec{x} , \vec{a} , \vec{b} と書く場合の両方がある。どちらを使っても良い。

練習問題

1. 3次元の方向ベクトル3個を用いて3次元の直交座標系を定義せよ。

1.5.1 ベクトルの表記

ベクトルは、縦にも横にも表記することがある。

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2) = (3, 2)$$

は横向きに、

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は縦に表記したものである。座標などは便宜的に横に書かれることが多いが、実際に計算する際には縦に表記する場合の方が多いので注意すること。なお、Octaveでは

```
octave:> A=[1,2,3]
```

```
A =
```

```
1 2 3
```

```
octave:> A=[1;2;3]
```

```
A =
```

```
1
```

```
2
```

```
3
```

```
octave:>
```

と表記する。カンマ (,) とセミコロン (;) の違いは非常に大きいので注意すること。

1.5.2 いろいろなベクトル

向きのある量はすべてベクトルで表現される。位置、変位 (位置の変化)、速度、加速度、向き、力などがこれにあたる。

1.5.3 ベクトルでない量

単なる数値で表される量、つまりベクトルでない量は、「スカラー量」と呼ばれる。時刻、温度、金額、速さ (cf. 速度) エネルギー、濃度などがこれにあたる。

練習問題

1. 知っているベクトル量とその意味および単位を挙げよ。
2. 知っているスカラー量とその意味および単位を挙げよ。

1.6 ベクトルの演算

ベクトルも、数と同様に加減乗除の演算ができる。加算に関しては数値と同じくらい単純だが、乗算は規則が複雑になる。

1.6.1 ベクトルの和と差

ベクトルの和と差は、それぞれ成分ごとに数値と同様の計算をすれば良い。ベクトルの和は、作図で求めることができる (図 1.3)。

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad (1.3)$$

$$(x_1, x_2) - (y_1, y_2) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \quad (1.4)$$

なお、上の 2 者をまとめて

$$(x_1, x_2) \pm (y_1, y_2) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2) \quad (1.5)$$

と書くことがある。加算に関しては前回触れた分配則、結合則が成り立つ。

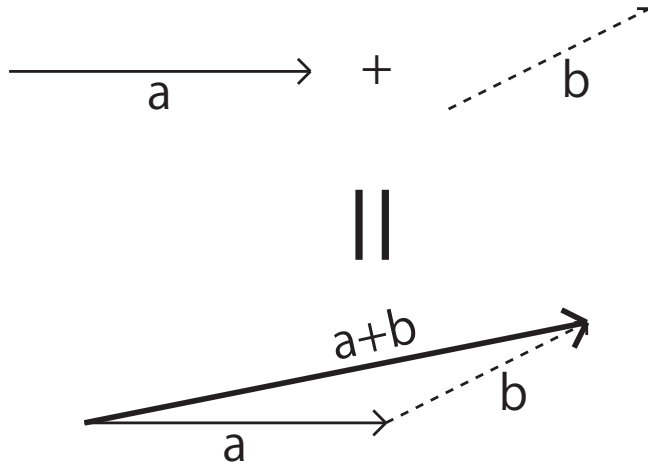


Figure 1.3: ベクトルの和を作図で求める方法

練習問題

- 3次元の縦ベクトルと横ベクトルをそれぞれ Octave で定義せよ。成分は適当な整数を代入してよい。
- 2つの縦ベクトル $A=(1;3;-1)$ と $B=(2;5;1)$ の和と差を計算し、それぞれが成分ごとの和と差になっていることを確認せよ。

1.6.2 変位ベクトル

2つの位置ベクトルの差を利用して、2点間の位置関係を表したものを変位ベクトルと呼ぶ。2点を結んだ線分に対応する。変位ベクトルをつくるには、矢の先端の点の位置ベクトルから元の点の位置ベクトルを引けば良い。変位ベクトルは矢の向きが変わらなければ、どう平行に移動しようとも変わらない。

1.6.3 ベクトルとスカラーの積

ベクトルとスカラー量の積は、「スカラー倍」と呼ばれる。これは、ベクトルの各成分をそれぞれスカラー量との積をとればよい。

$$m \cdot (a_1, a_2) = (m \cdot a_1, m \cdot a_2) \quad (1.6)$$

特定の成分のみ m 倍するには対角行列を使うことになる (後述)。

1.6.4 ベクトル同士の積

ベクトル同士の積には2つの方法がある。それぞれ異なる意味を持つので注意する。

スカラー積

スカラー積は、内積とも呼ばれる。次元が同じ2つのベクトル間でのみ定義される。記号 \cdot を用いて、2次元の場合では

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (1.7)$$

となり、結果はスカラーである。つまり、2つのベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ の積は

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.8)$$

である。内積はまた、ベクトルの大きさ ($\|\mathbf{x}\|$) を用いて

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta \quad (1.9)$$

とも定義される。 \mathbf{x}, \mathbf{y} がともに平面上のベクトルであると考え、内積をつかって2つのベクトルのなす角をもとめることができる。つまり

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \quad (1.10)$$

である。とくに、 $\cos(\pi/2) = 0$ であることを使うと、直交する (直角に交わる) 2つのベクトルの内積は0である。ことがわかる。これは非常に便利なので覚えておくこと。

練習問題

1. 直交座標系での各軸を決める方向ベクトルは、互いに直交していることを確かめよ。
2. ベクトルの内積には交換則、分配則が成り立つことを証明せよ。(自信のない人は2次元に限定してよい)

交換則

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

分配則

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

ベクトル積

スカラー積に対して、ベクトル積というものもある。これは2つの3次元ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ とそのなす角 θ を用いて以下のように定義される。演算子は \times を用いる。

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \quad (1.11)$$

のとき、

$$\mathbf{z} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \quad (1.12)$$

また

$$\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta \quad (1.13)$$

である。これは物理では角運動量などで使用する重要な演算子であるが、とりあえずこういうものがあるということを覚えておけば良い。

1.7 行列

行列とは、矩形を升目に区切り、それを数で埋めたものである。行は横向きの並びを、列は縦向きの並びをさす。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ2行3列(2x3)、2行2列(2x2)の行列である。とくに、後者の行と列の数が等しい行列を正方行列と呼ぶ。行列の成分は(行, 列)の順に表示する。例えば上の行列で、(1,2)の成分はそれぞれ b , 1 である。

行列は、ベクトルをまとめたものとして考えるとわかりやすい。個々のベクトルを計算するよりも、まとめて計算した方が意味がわかりやすいことがある。

さらに、実際に研究をする上では、一塊の数値の集まりを行列として扱うと便利なことが多い。例えば、表に並べたデータを行列として扱うなどであるが、逆にデータの集まりを行列としてみなすことができれば、高度な解析を簡単に行うことができる場合も多い。

練習問題

下記の行列 A について以下の設問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

1. 行列 A の行の数と列の数をそれぞれ答えよ。
2. 行列 A の成分 $(1,4)$ 、 $(3,2)$ を答えよ。
3. 行列 A の 2 列目は何か。
4. 行列 A の 3 行目は何か。

1.7.1 Octave での行列の定義

Octave は行列も扱うことができる。定義は行ごとにカンマ (,) 区切りで数値を入力し、改行時にセミコロン (;) を入力する。(行ベクトルと列ベクトルの定義の仕方を参照のこと)

行列の成分の表示は、数学の定義と同様に (行, 列) の形式を用いる。行列 A の $(2,1)$ 成分を求めるときには $A(2,1)$ と入力する。行列から行ごと、列ごとの表示をしたいときは、コロン (:) を用いる。行列 A の n 列目を抜き出したいときは $A(:,n)$ と入力し、 m 行目を抜き出したいときは $A(m,:)$ と入力する。

```
octave:1> A=[3,1,-3,2;1,2,1,0; 2,5,4,7]
```

```
A =
```

```

3   1  -3   2
1   2   1   0
2   5   4   7
```

```
octave:2> A(1,4)
```

```
ans = 2
```

```
octave:3> A(3,2)
```

```
ans = 5
```

```
octave:4> A(:,2)
```

```
ans =
```

```
1
```

```
2
```

```
5
```

```
octave:5> A(2,:)
```

```
ans =
```

```
1 2 1 0
```

```
octave:6> A(3,:)
```

```
ans =
```

```
2 5 4 7
```

1.7.2 行列の計算

行列の和と差

行列の和と差はベクトルと同様に成分ごとに和と差を計算する。スカラー積も同様。

練習問題

下記の行列 A,B について以下の計算をせよ。答えを Octave 上で確かめよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

1. A+B
2. A-B
3. 2A-B
4. tA (次節で)
5. ${}^tA+{}^tB$ (次節で)

行列の積

行列同士の積には注意が必要である。行列の積は、左側の行列の行と右側の行列の列のそれぞれ積をとる。ただし、任意の次元の行列間に積が計算できる訳ではない。

行列 A と行列 B の積 AB を考えよう。ここで、A の列の数 と B の行の数 が一致していないと積の計算はできない。自分自身との積が可能なのは正方行列のみである。

自分自身 (と同じ次元を持った) 行列の積をとるには転置行列を用いる。転置行列とは、行列の行と列を入れ替えたもので、行列の記号の左上に t という記号をつけて表す。t は英語の転置 (transpose) からとられたものである。Octave ではシングルクォート「'」を用いて転置演算子とする (例: A')。日本語キーボードでは “shift-7” である。“shift-@” ではない。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, {}^tA = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

上で述べたベクトルのスカラー積 $A \cdot B$ は、行列計算のルールに当てはめると

$$A \cdot {}^tB \quad (1.17)$$

となる。

行列の積は以下のように定義される。行列 A (m 行 n 列) と B (n 行 l 列) の積を C とするとき、C は (m 行 l 列) の大きさを持ち、

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1 \cdots m, j = 1 \cdots l \quad (1.18)$$

a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} はそれぞれ A, B, C の (i 行 j 列) 成分である。

数式で書くとわかりにくい、図で書くと以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} (1,1) & & \\ (2,1) & & \\ (3,1) & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \\ (3,1) & (3,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \\ (3,1) & (3,2) \end{pmatrix}$$

Figure 1.4: 行列の積

練習問題

以下の計算をせよ。A, B は上の大宇と同じものである。

- $A \cdot {}^t A$
- $A \cdot {}^t B$

1.7.3 単位行列と対角行列

単位行列とは、積によって元の行列を変えることのない行列である。例えば、数値の1とどのような数と積をとってもその値は変わらないが、その行列版である。

単位行列は、正方行列のみ定義され⁴、対角成分(左上から右下)に1が並び、その他の成分は0である。これを記号Eで表す。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

積の定義から、これにいかなる同じ型の正方行列をかけても元の行列は変わらないことが明らかである。

単位行列のように、対角成分以外はすべて0の行列を対角行列と呼ぶ。ベクトルの、特定の成分だけをスカラー倍したいとき、以下の対角行列を使うとよい。例えば、 4×1 の列ベクトルの3行目を m 倍したい場合は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

を用いるとよい。

1.7.4 逆行列

数という逆数の行列版である。ある数とその逆数とは、その2者の積を取ると1(単位元)になるものをいう。つまり、5に対し $1/5$ である。一般に、 x の逆数は $1/x = x^{-1}$ である。0に何を掛けても1にはならないので0に逆数は存在しない。逆行列は正方行列にのみ定義することができる。

行列 A の逆行列は、

$$AX = E \quad (1.21)$$

⁴正方行列以外では積により型が変わるので意味をなさない

となる関係を満たす行列 X のことである。 A^{-1} と書く。Octave では $inv(A)$ で求めることができる。

数では 0 にだけ気をつけていれば良かったが、行列の逆行列を考えるときにはこの例外は無視できない。詳細は省くが、ある行列 A に逆行列が存在するための条件とは、「行列式の値 $|A|$ が 0 でないこと」である。行列式とは、行列と似ているように見えるが、数学的には別物である。行列 A の行列式は Octave では $det(A)$ で求めることができる。

練習問題

1. 次の行列が逆行列を持つか否か判定し、逆行列を持つ場合はそれを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 逆行列を持つ行列に対し、元の行列と「逆行列と行列式の積」を計算し、比較せよ。
3. 上の結果を用いて、次の行列の逆行列を求めよ。ただし、 2×2 型の行列の場合の行列式は

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対し $\det(X) = ad - bc$ である。また気づいたことを記せ。

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

1.7.5 逆行列の連立方程式への応用

逆行列は非常に多用される。典型的なのが連立方程式の逆行列による解法である。以下の形の方程式が与えられたとする。

$$Ax = \mathbf{b} \tag{1.22}$$

これは、

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

というかたちの方程式、つまり

$$ax + by + cz = j \quad (1.24)$$

$$dx + ey + fz = k \quad (1.25)$$

$$gx + hy + iz = l \quad (1.26)$$

という連立方程式を行列で書いたものである。もし A が逆行列をもてば、

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\mathbf{b} \quad (1.27)$$

$A \cdot A^{-1} = I$ であるから、

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad (1.28)$$

となり、 \mathbf{x} に関して解けたことになる。

では、何でも逆行列が解ければ問題は解けたことになるか、というと、問題は少なくとも 2 点ある。まず、大きな逆行列を解くのは、膨大な計算量が必要になることである。そのために、行列の高速計算方法は今なお開発されつつある。次に、この方法で解けるのは線形方程式のみである。 x^2 などがはいつてくる場合は、解くことができない。しかし、逆にうまい近似などを使って問題をこの形に落とし込むことができれば、解をえるのが簡単になる、ということは覚えておく⁵と得である。

1.8 レポート問題 2

下から 3 問以上の問題を選べ解答せよ。記述式の問題に関しては、A4 用紙 1 頁以上 3 頁以内で述べよ。図書、論文やネット検索を参考に使用するのは構わないが、参考にした文献は明記すること⁵。

1. 下図に示した、頂点のうちの一つが原点にあり、一辺が x 軸上にあり辺の長さが 1 である正三角形 OAB の 3 点の座標を位置ベクトルとしてで表せ。
線分 \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{AB} , \vec{BA} をそれぞれ変位ベクトル (ベクトルの差) として表せ。また、4 つから選ばれるペアのすべての組み合わせに関して内積を計算せよ。

2. 以下の各問について答えよ。

- (a) 次の連立方程式を解け。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix}$$

⁵不必要に大きな文字、行間字間、不自然に大量の参考文献リストで埋める手法は推奨しない。減点の対象である

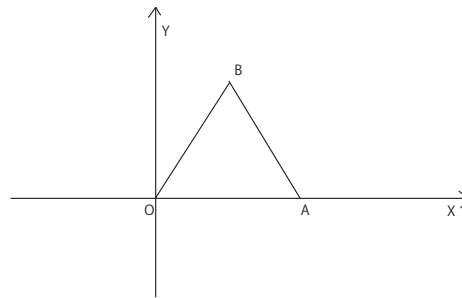


Figure 1.5: 正三角形 OAB

(b) 次の問題を解け。なるべく多くの解き方をせよ。
鶴と亀が合わせて 9 匹いました。脚の数はあわせて 24 本でした。鶴と亀はそれぞれ何匹ずついたでしょう。

(c) 上の 2 問を比較して共通性を述べよ。

- 測定可能なベクトル量、スカラー量を可能な限り列挙せよ。単位と意味を記せ。
- (理系向け) 逆行列を求めるアルゴリズムについて調べよ。
- (理系向け) コンピュータ・グラフィックスでの行列計算の利用方法について調べよ。
- 行列の計算と表計算ソフト (たとえば Excel) の類似点について述べよ。

また、授業の感想、疑問点等あれば付記のこと。(歓迎するが点数には関係しない)。

1.9 行列計算の応用

行列計算の応用として、簡単なグラフィックスを描いてみよう。位置ベクトルを行列により移動することを、1次変換と呼ぶ。

1. 回転ベクトルを原点の周りに角度 θ だけ回転する行列は、

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

で与えられる。原点以外を回転中心にしたい場合は、平行移動した後回転し、その後再度逆向きに平行移動を行う。平行移動は、ベクトルの加算である。

2. 拡大、縮小ベクトルを原点を中心として a 倍拡大，縮小する行列は、単位行列のスカラー倍をして

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

である。

回転行列の応用として、円を描くプログラムを入力して実行してみよう。

```
function y=rot(x)
  y = [cos(x),-sin(x);sin(x),cos(x)];
endfunction
x0=[1;0];
step=0.1*pi;
for(i=1:21)
  x0=rot(step)*x0;
  X(i,:)=x0';
endfor
plot(X(:,1),X(:,2),'+');
```

1.9.1 Octave によるグラフィックス

以下のプログラムを入力することにより、グラフィックスの準備が整う。

```
function y=rot(x)
  x = x*pi;
  y = [cos(x),-sin(x);sin(x),cos(x)];
endfunction
```



```
function T=trans(x,y)
for(i=1:5)
    T(i,:)=x,y;
endfor
endfunction
```

```
function plotR(X)
    plot(X(:,1),X(:,2))
endfunction
```

```
function Y=rotation(X,a)
    Y=(rot(a)*X')';
endfunction
```

```
Bigbox=[-3,-3;5,-3;5,4;-3,4;-3,-3];
closeplot;
hold on;
plotR(Bigbox);
R1 = [0,0;2,0;2,1;0,1;0,0];
```

(5,2) 行列に長方形の頂点を格納し、この転置したものと回転などの行列の積を取ることによって、図形の変形を行う。R1 に対し 1 次変換を行い、回転などを行うことが出来る。R2 = rotation(R1, θ) で R1 を θ [rad] だけ回転したものを R2 に代入することが出来る。

グラフィック画面上 (plot コマンドを実行することで開かれる) には、plotR(R1) などとする。