Chapter 6

微分方程式

6.1 はじめに

微分方程式とは、微分の形で書かれた数式である。これを積分して微分が入らない形にしたものを解と呼ぶ。

微分方程式には、積分が解析的に (つまり式変形で) 解くことが可能なものと不可能なものがある。とくに後者を計算機の力を利用して解く方法を学ぶのが本章の目的である。

諸君はこれまで解析的に解ける微分方程式しか習わなかったかもしれない。しかし、一般の微分方程式はほとんどが解けないものである。そのためには、近似を用いて解ける形に変換するか、数値積分をもちいて数値解を求めるかのどちらかの方法しかない。計算機が高速になり、データも大量に扱えるようになった現在では、数値解を教育の中心に据えても良いとも思える。

6.2 単振動

単振り子 (一点から軽い剛体棒で吊るされたおもり) の運動を考えよう。鉛直線からの傾き (振れ角) を θ、糸の長さ L として

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = -\frac{g}{L}\sin\theta \tag{6.1}$$

となる。学部の物理の授業では、θ が小さいとき $\theta = \sin\theta$ と近似することが出来ることから、

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = -\frac{g}{L}\theta \tag{6.2}$$

となり、これは容易に解ける。その解は

$$\theta = Ae^{i\sqrt{g/L}} \tag{6.3}$$

である。A は初期値により求まる定数である。

この近似を使わない場合は、解析的に解を求める方法がないので、数値計算で求めるほかない。Octave には lsode() という強力な数値積分用の関数がある。これを利用するには

- function の形で記述された微分方程式
- 時刻を表すベクトル t (このベクトルで指定された各時刻の値が結果として出力される)
- 初期条件 (t(1,1) での x の座標)

を用意すれば良い。

lsode() は一階の微分方程式しか解けないので、二階微分した形式は、以下のように変更する。

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2 \tag{6.4}$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = -\frac{g}{L}\sin x_1 \tag{6.5}$$

x_1 が θ、x_2 が $\frac{d}{dt}\theta$ に対応する。

以上から、単振り子の微分方程式を計算するプログラム pendulum.m を作成する。初期値と lsode() はコメントアウトしてあることに注意

```
#pendulum.m
function dx = pend(x)
  L=1;
  g=9.8;
  dx(1) = x(2);
  dx(2) = - g/L*sin(x(1));
endfunction

t=linspace(0,10,50);
#x0=[0.1;0]
#x=lsode("pend",x0,t);
```

例えば、以下のように実行する。

```
Octave:> source("pendulum.m");
Octave:> x00=[0.1;0];
Octave:> X1=lsode("pend",x00,t);
```

コメントアウトの部分のみを繰り返し実行と考えれば良い。つまり、初期条件を変えて、何度も軌跡を描いてみるには、x00 の再定義と lsode() の実行を組にして繰り返せば良い。

それぞれの初期値 $x01, x02, x03, x04, x05, x06$ から出発した振り子の軌跡をそれぞれ変数 $X1, X2, X3, X4, X5, X6$ に代入せよ。

x01=[0.5; 0.0], x02=[1.0;0.0], x03=[1.5;1.0], x04=[1.5;3.0], x05=[1.5;4.5], x06=[1.5;4.7]

表示するには、

```
octave:> plot(X1(:,1),X1(:,2);
octave:> hold on
octave:> plot(X2(:,1),X2(:,2),'r');
octave:> plot(X3(:,1),X3(:,2),'g');
octave:> plot(X4(:,1),X4(:,2),'b');
octave:> plot(X5(:,1),X5(:,2),'m');
octave:> plot(X6(:,1),X6(:,2),'c');
```

などとする。'r' 'g' 'b' 'm' 'c' はそれぞれプロットする色を表している。

このように $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$ の形式でプロットするものを相図 (phase portrait) と呼ぶ。円形の軌跡を描くときは正弦波的な単振動であるが、振幅が大きくなってくる ($\theta = \sin\theta$ が成立しなくなる) と、形が歪んでくる。X5 ではかなり形が歪み、X6 では一方向に回り続ける。これは、初速が大きくなってくるためである。

一方向に回り続けることができるか否かは、頂点を超えられるか否かで決まる。この点は、鞍点 (saddle) と呼ばれる性質をもつ。

6.3 非線形振動子

単振り子の場合は初期値により振る舞いが変わったが、今度はパラメータにより振る舞いが変わる方程式を挙げる。van der Pol 方程式と呼ばれるもので、

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{6.6}$$

ただし $\mu > 0$ とする。

これも、二階微分方程式を 2 つの一階微分方程式の形にして積分する。$x_1 = x$,$x_2 = \frac{dx}{dt}$ とおくと、

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \tag{6.7}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \tag{6.8}$$

と変換できる。

プログラム vanderpol.m は以下の通り。

```
#vanderpol.m
function dx =vanderpol(x,t)
  mu=1.0;
  dx(1) = x(2);
  dx(2) = mu*(1-x(1)^2)*x(2) - x(1);
endfunction

t=linspace(0,20,200);
x=lsode("vanderpol",[0; 1.0],t);
```

$\mu = 1.0$ とした場合の軌跡が下図である。

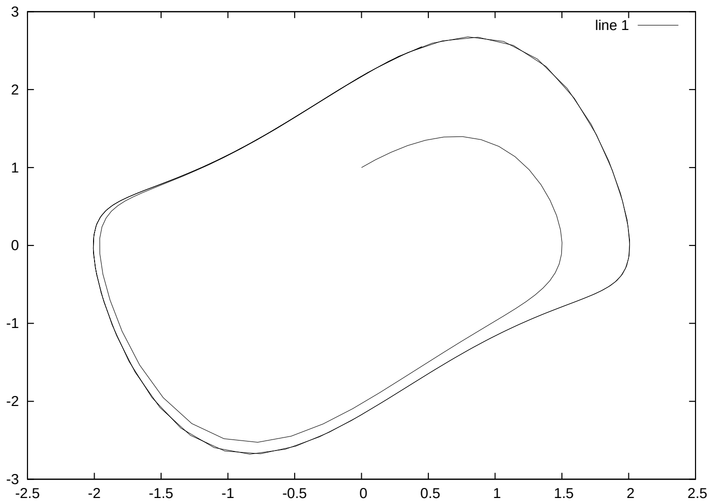

Figure 6.1: van der Pol 方程式の軌跡。

van der Pol 方程式では、一般の初期条件から出発した軌跡はパラメータによって決められる一つの周期軌道に引き込まれる。この周期軌道を「リミットサイクル (limit cycle)」と呼ぶ。パラメーターによって、単振動的な振動から、強弱のはっきりした弛緩振動とよばれる振動まで連続的に変化させることが可能である。

練習問題

vanderpol.m を改変し、$\mu = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.1, 1.5$ について相図を描け。

6.4 カオス力学系

非線形微分方程式のなかには、カオスと呼ばれる非常に複雑な振る舞いをするものがある。Lorentz による Lorentz 方程式は、大気の振る舞いをモデル化したものである。

$$\frac{dx}{dt} = -s(x-y) \tag{6.9}$$
$$\frac{dy}{dt} = Rx - y - xz \tag{6.10}$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \tag{6.11}$$

これを lsode() によって数値積分するのが以下の lorentz.m である。

```
#lorentz.m
function dx =lorentz(x,t)
  s=10;
  R=28;
  b=8/3;
  dx(1) = -s * (x(1)-x(2));
  dx(2) = R*x(1)-x(2)-x(1)*x(3);
  dx(3)= x(1)*x(2)-b*x(3);
endfunction

t=linspace(0,30,3000);
x=lsode("lorentz",[0; 0.03; 0],t);
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3));
```

この方程式は、あるパラメータ領域ではストレンジアトラクタと呼ばれる奇妙な (「ストレンジな」) 形をした軌道に引き込まれる。この中で折りたたみ、引き延ばしというカオスの特徴が現れているため、この形の中にいることは予測できるが、この形の中の隣り合った軌道は、常に「引き延ばされる」ため、差が指数関数的に増大する。

もう一つ、Rössler 方程式を挙げる。

$$\frac{dx}{dt} = -y - z \tag{6.12}$$
$$\frac{dy}{dt} = x + ay \tag{6.13}$$
$$\frac{dz}{dt} = b + xz - cz \tag{6.14}$$

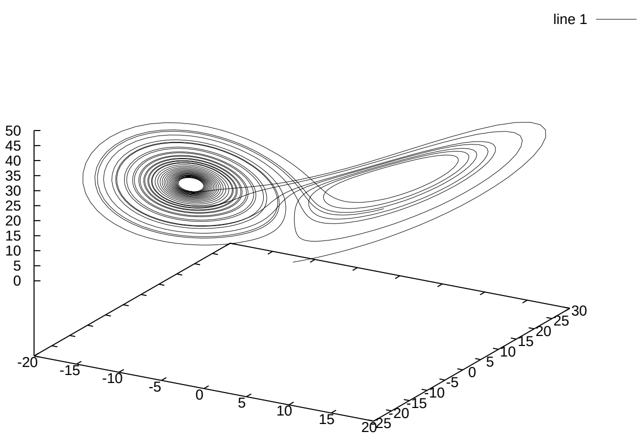

Figure 6.2: Lorentz 方程式の軌跡

(レポート問題) a=0.2, b=0.2, c=5.6, 初期値 [1;0;0] として lorentz.m と同様に軌道を描け。

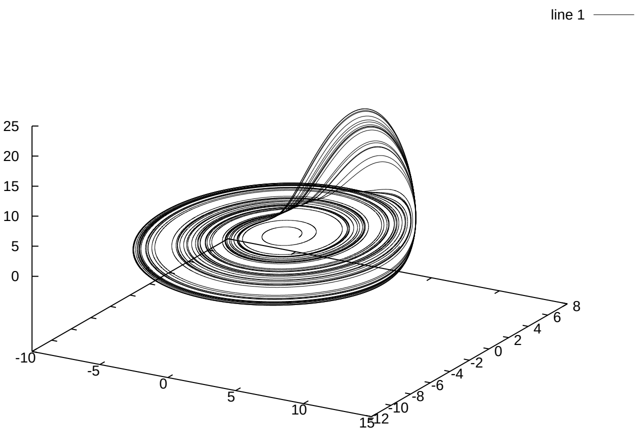

Figure 6.3: Rossler 方程式の軌道。