

数理アプローチ入門練習問題2

1 力学系

1.1 線形性

ある関数 f について線形性が成り立つとする。また、

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \quad (1)$$

とする。以下の設問に答えよ。 a, b はそれぞれ 0 でない定数とする。

1. $f(x_1 + x_2)$ と y_1, y_2 の関係を記せ。
2. $f(ax_1 + bx_2)$ と y_1, y_2 の関係を記せ。

1.2 ロジスティックマップ

ロジスティックマップは以下の式で表される。

$$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k) \quad (2)$$

以下の設問に答えよ。

1. ロジスティックマップについて、パラメータ $a=3.1$, 初期値 $X_0=0.15$ とし、マップの計算を 1000 回繰り返して求められた数列 $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ を列ベクトル X に代入するプログラムを作り、記せ。
2. 上のプログラムを実行し、 X の軌跡はどのような特徴を持っているか答えよ。

2 行列の固有値

1 次変換を繰り返すことで得られる力学系は、

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

である。

以下の行列で表される 1 次変換を繰り返すことによって作られる力学系について答えよ。Octave を使用してよい。数値計算の結果は、小数点以下 2 桁まで求めよ。

$$M1 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad M2 = \begin{pmatrix} 1.02 & 0.2 \\ 0.02 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad M3 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.3 \\ 0.24 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (4)$$

1. M1,M2,M3 それぞれについて固有値 λ_i と固有ベクトル v_i を求めよ。ただし、固有値の大きい順に並べよ。
2. M1,M2,M3 それぞれによって表される力学系の軌跡の特徴を述べよ。手書きで座標系を書き、その座標系の上に固有ベクトルを用いて、点列として表現せよ。

3 主成分分析

以下のデータが与えられたとする。例えば、ある3科目からなる試験成績で、各行が受験者の得点、各列が科目を表すと考える。

```
X=[22, 38, 30;  
    24, 51, 45;  
    33, 45, 56;  
    32, 45, 64;  
    38, 46, 66;  
    40, 49, 60;  
    41, 52, 46;  
    41, 46, 43;  
    46, 52, 70;  
    46, 49, 49;  
    50, 50, 54]
```

この行列の主成分分析をすることにより、総合スコアを求めたい。なお、授業で説明した `doPCA.m` を利用してよい。以下の各設問に答えよ。Octave を用いて数値計算をしてよい。なお、小数は小数点以下2桁まで求めよ。

1. 各列を標準化、つまり $XS = \frac{X-\mu}{\sigma}$ を、平均 μ と標準偏差 σ により変換する。これを Octave で実行するプログラムを記せ。
2. 上のプログラムを実行して求めた XS の共分散行列 R を答えよ。
3. XS の共分散行列 R の固有値 λ_i と固有ベクトル v_i をもとめよ。固有値と固有ベクトルは固有値の大きい順番に並べ替えよ。
4. 最大固有値に対応する固有ベクトルを用いて、標準化スコア

$$X2 = a_1XS_1 + a_2XS_2 + a_3XS_3 \quad (5)$$

の係数 a_1, a_2, a_3 を求めよ。

5. 各行 (各受験者) について、標準化スコアを求めるプログラムを記せ。
6. 標準化スコアを Octave で計算し、最も総合スコアの高いのは何点で、何行目の受験者が答えよ。

なお、Octave の関数 `max()` の使い方として、`[p,i]=max(X)` とすると、 p にベクトル X の最大値、 i にその最大値を与える行 (あるいは列) の番号が求められる。

(参考: doPCA.m)

```
#doPCA.m
function [v,l,Xs]=doPCA(X)
    [rows,cols]=size(X);
    Xs= center(X) ./ kron(std(X),ones(rows,1));
    R = corrcoef(Xs);
    [v,l]=eig(R);
endfunction
```

4 微分方程式

以下の微分方程式の数値解を求めるプログラムを作成せよ。軌跡は3列からなるベクトル X に代入せよ。

$$\frac{dx}{dt} = -y - z \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay \quad (7)$$

$$\frac{dz}{dt} = b + xz - cz \quad (8)$$

$a=0.2, b=0.2, c=5.6$, 初期値 $[1;0;0]$ とする。また、軌跡を求める時刻は0から100まで、0.01刻みとせよ。

(参照:資料7章 pp.5)