卒業論文

事前交渉とその均衡点

指導教官　鈴木光男　教授

東京工業大学
理学部　情報科学科

内平直志

１９８２年3月

概要

一般に、協力ゲームと非協力ゲームは、別のフレームワークで論じられてきたが、事前交渉のプロセスを展開形ゲームとして定式化することにより、協力結果を非協力ゲームの均衡点として表現することができる(Kalai 1981)。

本論文では、弱支配合理性を持つ Nash 均衡点として、P2 均衡点を新しく導入し、囚人のジレンマゲームに適用し、その有効性を示した。すなわち、P2 均衡点の長所は、①必ず存在する、②均衡点を求める計算が簡単、③弱支配合理性により、Nash 均衡の不適当な点のいくつかを除去できる、である。一方、短所としては、必ずしも完全均衡点でないので、微小な変動に対する安定性に欠ける場合がある。

事前交渉とその均衡点

理学部
情報科学科
3014
内平直志

目次

Page

第1章　序論

　非協力一発標準形ゲームの均衡点は、しばしば全プレイヤーにとって望ましくないことがあります。このような状況の古典的例が、囚人のジレンマであります。全プレイヤーにとって望ましい点が他に存在するにもかかわらず、その点が達成できない状況は、全くの非協力であるがゆえのジレンマであります。
　しかし、根本は囚人のジレンマ的状況であるけれども、他の誘因が加わることによってジレンマ的状況から脱することが可能であり、また現実の囚人のジレンマ的状況の多くは、そうなっています。ゲーム理論では、このような“囚人のジレンマ型ゲームの均衡点の改善”が一つの重要な研究課題となっています。

　全くの非協力であるがゆえのジレンマから抜け出すためには、何らかの形で、協力性というものを誘発させなければなりません。その方法としては、ゲームを無限にくり返す、

Nashの交渉解のように完全な"協力"を仮定するなど、種々な角度からのアプローチがあります。この論文では、ゲームの前にプレイヤー間で、戦略について交渉を行なう、という形態を考えます。これを事前交渉として定式化します。

ゲーム理論のもう一つの研究課題として、"協力を非協力ゲームの枠内で考える"ということがあります。これは、協力は、結局のところ各プレイヤーが、自分自身の利益を向上させるための手段であり、協力の過程自体は非協力ゲームである、という論理によるものです。協力というものを、前提として設定するのではなく、ゲーム自体に組み込むことになります。この論文では、事前交渉を、非協力ゲームとして定式化しました。すなわち交渉のステップを展開形ゲームの手番と考えることによって、事前交渉を展開形ゲームで表わしました。

事前交渉を表現した展開形ゲームの均衡点として、P_2均衡点を新しく定義しました。P_2均衡点は、Nash均衡に、弱支配に関する合理性の条件を加えたもので、一般性を持っています。この論文の前半は、展開形ゲームの種々な均衡点とこのP_2均衡点について論じ、後半で、事前交渉についてP_2均衡点を用いた考察を行なっています。

各章の概略は次のとおりです

第2章　展開形ゲームと完全均衡点

展開形ゲームを厳密に定義し、種々の概念を示しました。次に展開形ゲームの均衡点として、Nash均衡点，部分ゲーム完全均衡点，完全均衡点について論じました。特に完全均衡点について、その存在定理を示しました。

第3章　P_2均衡点

均衡点の合理性基準として、弱支配合理性を定義し、展開形の各構成部分でNash均衡と弱支配合理性を持つ均衡点（P_1均衡点・P_2均衡点）を定義しました。そして、それらの均衡点の性質を調べました。

第4章　事前交渉の非協力モデル

事前交渉のモデルを定式化し、それを囚人のジレンマ，逢い引きのトラブルなどに適用した例を中心に考察を進めました。

第2章 展開形ゲームと完全均衡点

§1 展開形ゲームの基本概念

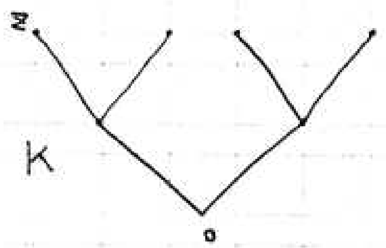
1.1 展開形ゲームの定式化

本論文では有限な展開形ゲームに限定して述べる。このゲームは次のように表記する。

$$\Gamma = (K, P, U, C, p, h)$$

以下で K, P, U, C, p, h を説明しよう。

(a) ゲームの木 K



ゲームの木 K は有限で、起点 o を持つ。K の点 x と o を結ぶ点と辺の系列を x への path とよぶ。$x \neq y$ で、y への path が x への path を含むとき、y の前に x がくる、あるいは x のあとに y がくるという。終点 z とは、z のあとに点がないような点である。終点全体の集合を Z とする。

終点までの path を play と呼ぶ。辺を選択枝という。点 x と x のあとにくる点を連結している

辺を、xにおける選択枝という。終点以外のすべての点の集合をXとする。

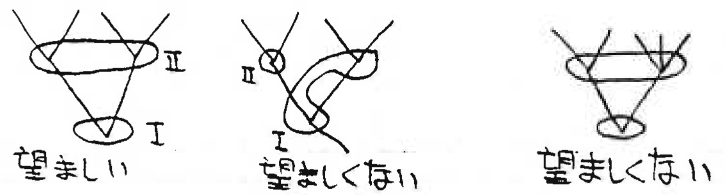
(b) プレイヤー分割 P

プレイヤー分割$P=(P_0, P_1, \cdots\cdots, P_n)$は、$X$の各プレイヤーへの分割である。このとき$P_i$をプレイヤー$i$のプレイヤー集合と呼ぶ。プレイヤー0は偶然手番を意味する。プレイヤー集合は空でもかまわない。$P_i (i=1,\cdots\cdots n)$は個人プレイヤー集合と呼びP_0と区別する。

(c) 情報分割 U

プレイヤーiの情報集合はP_iの部分集合である。$u \subset P_i (i=1,\cdots, n)$が(情報集合として)望ましいとは、$u \neq \phi$で任意のプレイとたかだか1回しか交差せず、すべての$x \in u$に対してその選択枝の数が同数であることである。$u \subset P_0$が(情報集合として)望ましいとは、uが一点集合であることをいう。情報分割Uは、プレイヤー分割Pのプレイヤー集合の、望ましい部分集合への再分化である。

(例)



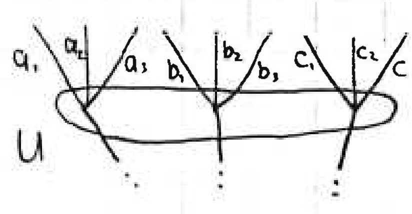
これらの望ましい部分集合を情報集合という。情報集合 U が $U \subseteq P_i$ のとき、U はプレイヤー i の情報集合という。$U \subseteq P_i \ (i=1,\cdots,n)$ のとき U を個人情報集合という。

(d) 選択分割 C

情報集合の各点は同数の選択枝を持っているこの選択枝全体をいくつかのグループに分けるのが選択分割である。

A_U を U の点における選択枝全体の集合とする。A_U の部分集合 C が(選択として)望ましいとは U の各点 x に対して C がきっかり1つずつの選択枝を含むことである。

(例)



$A_U = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$

$C = \{a_1, b_1, c_1\}$: 望ましい

$C = \{a_1, b_2, c_3\}$: 望ましい

$C = \{a_1, a_2, b_1\}$: 望ましくない

選択分割Cは、Kのすべての辺の集合をA_uの望ましい部分集合に分割することである。Cによってできた望ましい部分集合を選択(choice)という。$C_u \triangleq \{c : c \in A_u\}$

uが個人情報集合で$c \in A_u$ならば、cを個人選択という。cが個人選択でないとき、偶然選択という。

(e) 確率割り当て p

C_u上の確率分布をp_uで表現する。

$$p_u : C_u \to [0,1] \quad \text{s.t.} \sum_{u \in C_u} p_u = 1$$

$p_u(c) > 0 \ (\forall c \in C_u)$ のときp_uが完全混合であるという。偶然情報集合uに対してp_uが完全混合になっているように、すべての情報集合uに対してp_uを対応させる関数を確率割り当てpとする。

(f) 利得関数 h

$$h : Z \to R^n$$

$$h(z) = (h_1(z), \cdots\cdots, h_n(z)) \qquad z \in Z$$

$h_i(z)$は、Kの終点zにおけるプレイヤーiの利得を表わす。hを利得関数。$h(z)$を利得

ベクトルという。

1.2 完全記憶

1.1 で定式化された展開形ゲームは、あまりにも広大である。そこで完全記憶という現実性のある制約を考える。

(Def)

展開形ゲーム $\Gamma = (K, P, U, C, p, h)$ が完全記憶である。

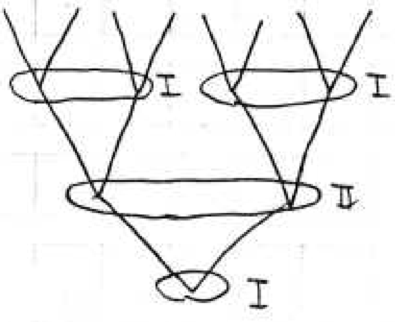
$$\Updownarrow \text{def}$$

任意の $i = 1, \cdots, n$ に対して

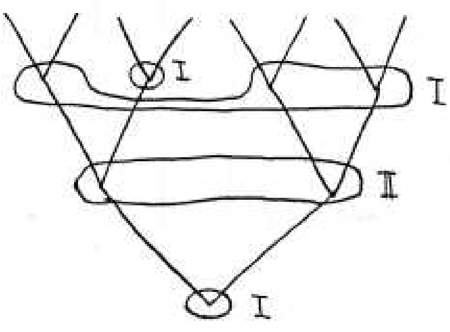
$\forall u, v \in U_i, \quad \forall c \in C_u$

$$\left[\begin{array}{l} c\text{ のあとにくるよう} \\ \text{な } v \text{ の点がいつでも} \\ \text{存在する。} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v\text{ のすべての点は} \\ c\text{ のあとにくる} \end{array} \right]$$

(例)



完全記憶



完全記憶でない

完全記憶の意味：

完全記憶のゲームにおいては、プレイヤーはプレイの過程において自分が過去に到達した情報集合とその情報集合での選択を完全に覚えている。この仮定は十分現実性があることである。ゲーム理論が記憶力や推理力を十分に持つ絶対的合理的意志決定者の行動を分析するものである以上、プレイヤーがチームでなく個人であるならば、そのゲームが完全記憶をもつと仮定することは必要かつ当然のことであろう。

それでは、プレイヤーが個人でなくチームであるようなゲームを考察する必要があるかというと、厳密に非協力なゲームの観点からいうと答えは"考察の必要なし"であろう。なぜならば、与えられた闘争状態を個人プレイヤーのゲームとしてモデル化することは原則的に可能である。また、複数の個人が同じ目標を追求しているという意味でチームを組んでいるような場合、各人に同一の利得関数

を作ってやることで別々のプレイヤーとみなすことができる。チームが単なる同一の利得というもの以上に団結しているならば、これは厳密な非協力ゲームの枠を逸脱している。このような場合は展開形では表現不可能である。

　以上のようなことから、完全記憶をもつ展開形ゲームに限って考察すれば十分だといえる。

1.3 戦略と期待利得

ここでは展開形ゲーム $\Gamma=(K,P,U,C,p,h)$ を実際にプレイする場合の戦略とその戦略による期待利得を考える。

(a) 局所戦略

(Def) b_{iu} $(u \in U_i)$: 情報集合 u における局所戦略

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $b_{iu} : C_u \longrightarrow [0,1]$ s.t. $\sum_{c \in C_u} b_{iu}(c) = 1$

C_u の要素に対してそれを採る確率を与える関数

(Def) b_{iu} が局所純粋戦略 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $b_{iu}(c) = \begin{cases} 1 & (\exists_1 c \in C_u) \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$

誤解する危険のないときは、選択 c と $b_{iu}(c)=1$ なる局所純粋戦略 b_{iu} とは区別しない。

(b) 行動戦略

プレイヤー i の各情報集合に対応する局所純粋戦略の集合を、プレイヤー i の行動戦略といい、b_i と表わす。すなわち $b_i \triangleq \{b_{iu} : u \in U_i\}$。
プレイヤー i の行動戦略の全体を B_i と表わす。

(c) 純粋戦略

$\pi_i \underset{\mathrm{def}}{=} \{c \in C_u : u \in U_i\}$

$= \{b_{iu} : u \in U$, ただし b_{iu} は純粋$\}$

π_i をプレイヤー i の純粋戦略という。

$\pi_i \in B_i$ である。プレイヤー i の純粋戦略の全体を Π_i と表わす。

(d) 混合戦略

プレイヤー i の混合戦略は、Π_i 上への確率分布を示す関数である。すなわち純粋戦略をある確率に従がってとる戦略である。

(Def) q_i がプレイヤー i の混合戦略である $\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $q_i : \Pi_i \longrightarrow [0,1]$ s.t. $\sum_{\pi_i \in \Pi_i} q_i(\pi_i) = 1$

プレイヤー i の純粋戦略の全体を Q_i で表わす。また誤解する危険がない場合、π_i と

q_i s.t. $\begin{cases} q_i(\pi_i) = 1 \\ q_i(\pi_i') = 0 \ (\pi_i' \neq \pi_i) \end{cases}$ を同一視する。

(e) 行動戦略混合

プレイヤー i の行動戦略混合は、B_i 上への確率分布を示す関数で、B_i の有限個の要素に

正の確率を与えるものである。すなわち、行動戦略上の混合戦略と考えることができる。

(Def) s_i がプレイヤー i の行動戦略混合である

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$s_i : B_i \longrightarrow [0, 1]$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{b \in B_i} s_i(b) = 1$$

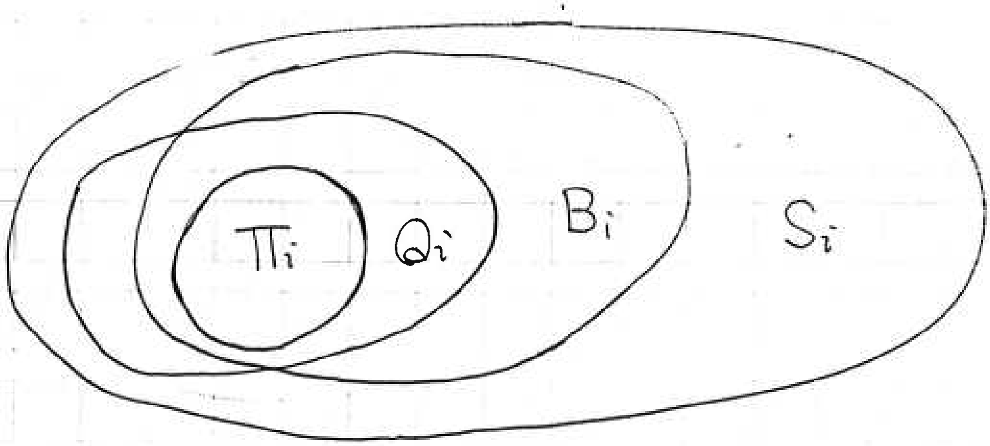
$\{b \in B : s_i(b) > 0\}$ が有限集合

誤解をまねく危険がないとき、b_i と

s_i s.t. $\begin{cases} s_i(b_i) = 1 \\ s_i(b_i') = 0 \quad (b_i' \neq b_i) \end{cases}$ を同一視する。

またプレイヤー i の行動戦略混合の全体を S_i と表わす。このとき

$$\Pi_i \subset Q_i \subset S_i \qquad \Pi_i \subset B_i \subset S_i$$



展開形ゲームのいかなる戦略も行動戦略混合で表現することができる。

(f) 組

n人のプレイヤーの戦略を集めたものを"組"とよぶ。つまり

純粋戦略の組　　$\pi=(\pi_1,\cdots\cdots,\pi_n)$, $\pi_i \in \Pi_i$

混合戦略の組　　$q=(q_1,\cdots\cdots,q_n)$, $q_i \in Q_i$

行動戦略の組　　$b=(b_1,\cdots\cdots,b_n)$, $b_i \in B_i$

行動戦略混合の組　　$s=(s_1,\cdots\cdots,s_n)$, $s_i \in S_i$

(g) 実現確率

行動戦略混合 s_i に従がって行動するプレイヤー i は次のような手順で行動する。

step 1　確率分布 $\{s_i(b_i) : b_i \in B_i\}$ に従がって B_i の中からある行動戦略 b_i を選択する。

step 2　プレイを開始する。プレイの途上、自分の情報集合に到達したら、そこで確率分布 $\{b_{iu}(c) : c \in C_u\}$ に従がって C_u の中からある選択 c をとる。

$s=(s_1,\cdots\cdots,s_n)$ が行動戦略混合の組のとき、各プレイヤー i が s_i に従がって行動すると仮定

つまり、sにおいてs_iとt_iを入れかえてできる戦略の組をs/t_iと表わす。行動戦略、純粋戦略、混合戦略に対しても同様に定義する。

(b) 実現同等

(Def) s_i', s_i''：プレイヤーiの行動戦略混合

s_i'とs_i''が実現同等

$$\Updownarrow \text{def}$$

任意の行動戦略混合の組sに対して

$$p(x, s/s_i') = p(x, s/s_i'') \quad \text{for every } x \in X$$

(c) 利得同等

(Def) s_i', s_i''はプレイヤーiの行動戦略混合

s_i'とs_i''が利得同等

$$\Updownarrow \text{def}$$

任意の行動戦略混合の組sに対して

$$H(s/s_i') = H(s/s_i'')$$

このとき、s_i'とs_i''が実現同等ならば、利得同等でもあることは明らかである。

$$\because \quad p(z, s/s_i') = p(z, s/s_i'') \quad \forall z \in Z$$

するならば、Kの点 x にプレイが到達する確率が計算できる。この確率を $\rho(x, s)$ と書き、実現確率とよぶ。

(h) 期待利得

実現確率によって、期待利得が計算できる。$H(s) = (H_1(s), \cdots\cdots, H_n(s))$ を期待利得ベクトルとすると、次のようになる。

$$H(s) = \sum_{z \in Z} \rho(z, s)\, h(z) \quad \text{ただし}\quad h(z) = (h_1(z), \cdots, h_n(z))$$

この期待利得は、純粋戦略・行動戦略・混合戦略の組に対しても適用できる。

1.4 KUHNの定理

H.W.KUHN (1953) によって証明された完全記憶をもつゲームにおける重要な定理を紹介しよう。定理にはいる前に多少の準備が必要である。

(a) 記述上の約束

$s = (s_1, \cdots\cdots, s_n)$：行動戦略混合の組

t_i ：プレイヤー i の行動戦略混合

$s/t_i \triangleq (s_1, \cdots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \cdots, s_n)$

(d) KUHN の定理

> （定理 2.1 ） KUHN の定理
> 完全記憶をもつ展開形ゲームΓにおいては、プレイヤー i の任意の行動戦略混合に対し、それと実現同等な行動戦略が存在する。

この定理を式を用いて表わすと、

$$^{\forall} s_i \in S_i \,,\ ^{\exists} b_i \in B_i \,;$$

$$\rho(x, s/s_i) = \rho(x, s/b_i) \quad \text{for every } x \in X$$
$$\text{for every } s \in S$$

この定理は非常に重要である。この定理を証明するために、さらに準備が必要である。

(e) 条件付き選択確率

$s = (s_1, \cdots, s_n)$：行動戦略混合の組

$x \in u \in U_i$ s.t. $\rho(x, s) > 0$

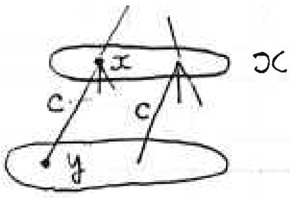
$c \in C_u$

このような s, x, c に対して**条件付き選択確率** $\mu(c, x, s)$を次のように定義する。

$\mu(c, x, s)$は点 x に到達したことを前提として、u で選択 c が採られる確率である。

$$\mu(C, x, S) = \frac{p(y, s)}{p(x, s)}$$

ただし $y \in X$ は x と C の選択枝で隣接している点



(Lemma 1)

展開形ゲーム Γ において、

$\mu(C, x, S)$ が定義できるような (c, x, S) の組に対して、$\mu(C, x, s)$ は i 以外の S の成分 $S_j\,(j \neq i)$ には依存していない。

(証明)

$S = (S_1, \cdots\cdots, S_n)$：行動戦略混合の組

$x \in u \in U_i$ s.t. $p(x, s) > 0$

$c \in C_u$

$b_i^1, \cdots\cdots, b_i^k$：プレイヤー i の行動戦略

s.t. $S_i(b_i^j) > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$

(注 $b_i^1, \cdots, b_i^k$ は S_i によって正の確率を与えられる有限個の行動戦略のすべてである。)

さて、点 x が到達されたとき、その時とられていた行動戦略が b_i^j である事後確率を $t_i(b_i^j)$ とする。$t_i(b_i^j)$ は S_i のみに依存している。

なぜなら、点xが到達されたということは、プレイがxに到達するまでに通過したプレイヤーiの各情報集合で、プレイヤーiがとった選択がわかっているということである。そして$\tau_i(b_i^j)$は、これらの選択とs_iにより計算できる。よって、s_iのみに依存している。

このとき

$$\mu(c,x,s)=\sum_{j=1}^{k} \tau_i(b_i^j)\, b_{iu}^j(c)$$

とあらわせる。すなわち$\mu(c,x,s)$はs_iのみに依存していて、$s_j(j\neq i)$とは独立である。

（証明終り）

（Lemma 2）

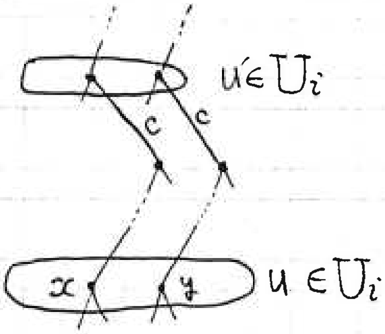
完全記憶をもつ展開形ゲームΓでは、$\mu(c,x,s)$が定義できるならば、xと同じ情報集合に含まれる任意の点yに対して

$$\mu(c,x,s)=\mu(c,y,s)$$

が成り立つ。

（証明）

完全記憶のゲームにおいては、$u \in U_i$, $x \in u$, $y \in u$ とするとき、x へのpath上のプレイヤー i の選択と y へのpath上の選択は一致しなければならない。



ゆえに x における事後確率 $t_i(b_i^j)$ と、y における事後確率は等しい。

$$\therefore \mu(c, x, s) = \mu(c, y, s) = \sum_{j=1}^{k_i} t_i(b_i^j)\, b_{iu}^j(c)$$

（証明終り）

(f)　KUHNの定理の証明

前で出てきた結果を用いてKUHNの定理を証明しよう。

Lemma 1 とLemma 2により、個人プレイヤーのプレイヤー集合 P_i の点 x における条件付選択確率 $\mu(c, x, s)$ は、s_i のみに依存し x を含む情報集合 $u(\in U_i)$ の他の点の条件付選択確率とも等しい。よって $\mu_i(c, u, s_i)$ と書くことができる。

$\mu_i(c, u, s_i)$ を用いて s_i と実現同等な行動戦略を次のように作ることができる。

各情報集合 $u \in U_i$ で

$$b_{iu} \triangleq \begin{cases} \mu_i(c, u, s_i) & \text{if } {}^{\exists}s=(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_n) \text{ s.t. } \mu(x,s)>0 \text{ for some } x\in u \\ \text{任意} & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき $b_i = \{b_{iu} : u \in U_i\}$ はプレイヤー i の行動戦略であり、s_i と b_i が実現同等であることは定義より明らかである。

（証明終り）

(g) KUHN の定理の重要性

この定理によって、完全記憶をもつ展開形ゲームにおいては行動戦略のみに注目すればよいことがわかる。混合戦略や行動戦略混合によってプレイヤーが達成できることは、実現同等な行動戦略を用いても達成できる。以後、完全均衡点を導入し考察していくわけであるが、完全記憶が前提となっているかぎりすべて行動戦略で論じれば十分である。

§2　Nash均衡点と部分ゲーム完全均衡点

この章では、完全記憶をもつ展開形ゲーム $\Gamma=(K,P,U,C,p,h)$ に関して、均衡点の概念を導入しよう。KUHNの定理により、このようなゲームでは行動戦略について考察すれば十分であることがわかっているので、最適反応や均衡点の定義を行動戦略について定義していく。

2.1　Nash均衡点

Nash均衡点は、ただ単に均衡点ともいう。ここではNash均衡点の定義とその存在定理を示すが、Nash均衡の持つ意味に関しては論じない。均衡点の解釈の問題は、本論文のめざすところではないからである。

(a)　最適反応

$b=(b_1,\cdots,b_n)$ を Γ の行動戦略の組とする。

(Def)　プレイヤー i の行動戦略 $\hat{b}_i$ が b に対する最適反応である。

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$H_i(b/\hat{b}_i)=\max_{b_i'\in B_i} H_i(b/b_i')$$

(Def) 行動戦略の組 $\hat{b}=(\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_n)$ が b に対する最適反応である。

$$\Updownarrow \text{def}$$

各 i について $\hat{b}_i$ が b への最適反応となっている。

(b) Nash 均衡点

(Def) 行動戦略の組 $b^*=(b_1,\cdots,b_n)$ が Nash 均衡点 $\Updownarrow$ def b^* が自分自身に対する最適反応である

次に完全記憶をもつ展開形ゲームは行動戦略において均衡点をもつことを示す。標準形ゲームで均衡点の存在を最初に証明したのは Nash (1951) である。ここではより一般的な形の存在定理を示し、それに続いて完全記憶をもつ展開形ゲームは行動戦略において均衡点をもつことを示す。

まず非協力 n 人ゲームのモデルを次のように定める。

G1. プレイヤーの数 n は有限

G2. プレイヤーi $(i=1,\cdots,n)$の戦略の集合S_iはm_i次元ユークリッド空間のコンパクト凸集合である

G3. プレイヤーi $(i=1,\cdots,n)$の利得関数f_iは$S=S_1\times\cdots\times S_n$上の実数値連続関数である

G4. プレイヤーi $(i=1,\cdots,n)$の利得関数f_iは、$s_i\in S_i$について準凹(quasi-concave)である

(定理2.2)
G1～G4を満たす非協力ゲームはNash均衡点をもつ

(証明) 省略 (Friedman [1977] 参照)

(定理2.3)
完全記憶をもつ展開形ゲームは行動戦略においてNash均衡点をもつ

(証明) 省略 (Kuhn [1953] 参照)

2.2 部分ゲーム完全均衡点

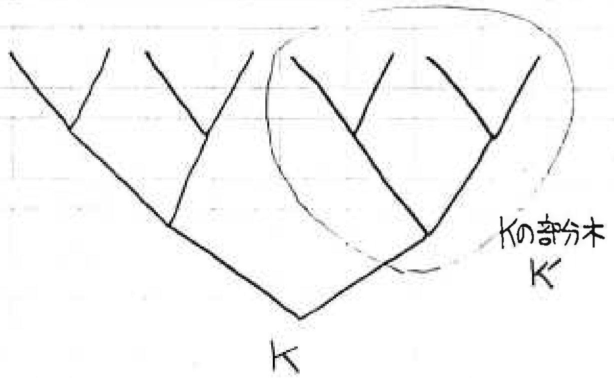
ここでは、Nash均衡点より強い均衡点として部分ゲーム完全均衡点を定義する。

(a) 部分ゲーム

$\Gamma = (K, P, U, C, p, h)$: 展開形ゲーム

Kのある点xとxの後にくるすべての点、そしてそれらの点に接続しているすべての辺からなるKの部分木をK'とする。

[例]



(Def) 部分木K'が正則 $\overset{}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}}$ K'の点を1つでも含むΓの情報集合はK'以外の点を含まない。

任意の正則な部分木K'に対して、部分ゲーム$\Gamma' = (K', P', U', C', p', h')$が定義できる。$P', U', C', p', h'$は、$P, U, C, p, h$を$K'$上に限定したものである。

(b) 導入される戦略

Γ'：Γの部分ゲーム

$b=(b_1,\cdots,b_n)$：Γの行動戦略の組

b_iをΓ'のプレイヤーの情報集合の局所戦略に限定したものをb_i'とすると、b_i'はΓ'の行動戦略となる。このときb_i'はb_iによってΓ'上に導入された、あるいはb_i'はb_iをΓ'上に限定した戦略という。さらに$b'=(b_1',\cdots,b_n')$はbによってΓ'上に導入された、あるいはb'はbをΓ'上に限定した戦略という。b_i'は$b_i|_{\Gamma'}$，b'は$b|_{\Gamma'}$とも記す。

(c) 部分ゲーム完全

（定義）

Γ：展開形ゲーム

b^*：Γの均衡点

b^*が部分ゲーム完全である

$\Updownarrow$

b^*によって任意の部分ゲームΓ'上に導入された戦略の組$b^*|_{\Gamma'}$は、Γ'の均衡点になっている

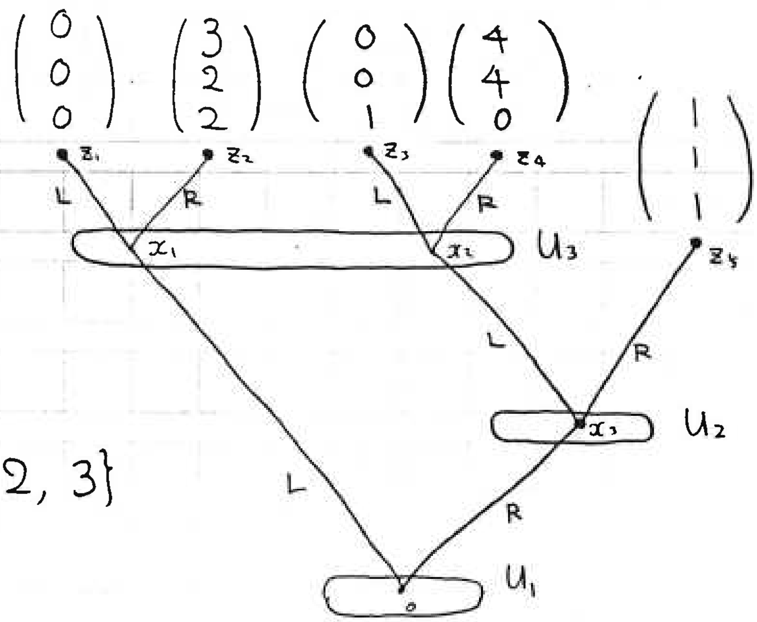
部分ゲーム完全均衡点は、Selten によってNash均衡点の到達されない部分ゲームにおける不合理な均衡戦略を除くために定義された。しかし、それでもまだNash均衡点の中から、不合理、あるいは不適当な点を完全に除くことはできなかった。そこでSeltenは、1975年、部分ゲーム完全均衡点よりさらに強い均衡点を定義した。それが、次の節で述べる完全均衡点である。

§3 完全均衡点

この章では、部分ゲーム完全均衡点にもなお非合理的な点があることを示し、これを改善するためにさらに強い均衡点である完全均衡点を定義し、その存在定理を証明する。

3.1 部分ゲーム完全均衡点の問題点

部分ゲーム完全均衡点の定義は、直感的に非合理的な均衡点のいくつかを除外することができた。しかしこの定義によって、必ずしもすべての非合理的な均衡点が除かれるわけではない。この節では、部分ゲーム完全均衡点にもまだ問題点があることを実際の数値例を用いて示そう。



$N = \{1, 2, 3\}$

図 1

図1のような展開形ゲームを考える。明らかにこのゲームは部分ゲームを持たない。すなわち均衡点は同時に部分ゲーム完全点にもなっている。各プレイヤーは1つずつの情報集合 u_1, u_2, u_3 を持つ。またこのゲームは完全記憶である。各プレイヤーは選択として"L"と"R"の2つを持つので、プレイヤー i の行動戦略は彼が"R"を選ぶ確率 P_i によって特徴づけることができる。さらに行動戦略の組は $b = (P_1, P_2, P_3)$ によって表わすことができる。

図1のゲームの均衡点は次の2つのタイプになる。

タイプ1：$P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $0 \leqq P_3 \leqq \frac{1}{4}$

タイプ2：$P_1 = 0$, $\frac{1}{3} \leq P_2 \leq 1$, $P_3 = 1$

タイプ2の均衡点を考察してみよう。このタイプの均衡点がプレイされると、プレイヤー2の情報集合 u_2 は通過しない。それゆえプレイヤー2の期待利得は彼の戦略に依存していない。彼の均衡戦略（$\frac{1}{3} \leq P_2 \leq 1$）はたし

かに他のプレイヤーの均衡戦略に対する最適反応となっている。しかし、このような到達されない情報集合において、これらの均衡戦略は、はたして本当に合理的だろうか。

ここで各プレイヤーがタイプ2の均衡点のうち b=(0,1,1) がこのゲームにおける合理的、規範的、均衡戦略であると考えたとする。さてこのとき、仮にプレイが u_2 に到達した場合に、プレイヤー2がRを選択するということは本当に信じられることだろうか。均衡点に従ってプレイヤー3がRを選択するという確信を持っているならば、プレイヤー2は1しか得られないRより、4得られるLを選択しないだろうか。同様のことがタイプ2の他の均衡点についてもいえる。

明らかにタイプ2の均衡点は合理的だとみなし難い。プレイヤー2の選択は、ゲーム全体での彼の期待利得より、点xに到達したことを前提とする局所的な条件付き期待利得により決定されるべきである。この均衡点での

彼の利得は、プレイヤー1がLを選択するものとして計算されているが、プレイが情報集合u_2に到達するためにはプレイヤー1がRを選択しなければならない。u_2での局所的戦略としては、プレイヤー1がRを選択したことを仮定しなければならないのである。

部分ゲーム完全均衡点は、均衡点によって到達されない部分ゲームにおける非合理的な行動を除外した。しかしこの例のように到達されない情報集合における非合理的行動までは除外することができない。

次の節では、プレイヤーがごく微小な確率で間違いをおこすという考えに基づいたモデルを導入する。誤りを故意に含めた状況での戦略を考えることにより、そのような状況に対しての安定性を考察する。そしてその安定性を持つと同時に、到達されない情報集合における非合理的な行動を排除するような新しい均衡点を考えだそうというのである。

3.2 "わずかな誤り"のモデル化

プレイヤーが完璧な理性の持ち主であれば誤りはありえない。しかしながら、微小な確率で誤りがおこりうる場合でも、有効性を保つような均衡点が存在するならば、その均衡点は安定的であり、望ましいといえる。そこでこのような状況をモデル化して調べることによって、展開形ゲームの均衡点により深い洞察を与えていこう。

完全記憶の展開形ゲームの個人プレイヤーに対して、次のように理性のちょっとした不完全性を与えていく。各情報集合uにおいて、微小な確率$\varepsilon_u > 0$でプレイヤーの理性が崩壊するとする。理性が崩壊したとき選択$c \in C_u$を採る確率を$q_c > 0$とする。ε_u, q_cという確率は、すべての情報集合と選択に対して定まるが、それらは他のいかなるものとも独立で相関はないと仮定する。

uにおける合理的局所戦略で、$c \in C_u$をとる確率をP_cとすると、この"誤りを含む"場合の

$c \in C_u$をとる確率$\hat{p}_c$は、

$$\hat{p}_c = (1-\varepsilon_u)\,p_c + \varepsilon_u q_c$$

ε_uとq_cを導入することによって、もとのゲームΓから"微小な確率での理性の崩壊"を含むゲーム$\hat{\Gamma}$を定義することができる。$\hat{\Gamma}$をΓの**変動ゲーム**という。定義を簡単にするために次のような準備をする。

$\hat{\Gamma}$において、プレイヤーが局所戦略でp_cを決定した結果$\hat{p}_c$ができるわけだが、最初から$\hat{p}_c$を$\hat{\Gamma}$のパラメターとみなしてもかまわない。しかし、そのかわり$\hat{p}_c$には次のような上限、下限ができる。

$$\varepsilon_u q_c \leq \hat{p}_c \leq 1 - \varepsilon_u(1-q_c)$$

$$\text{for every } c \in C_u$$
$$\text{for every } u \in U_i$$
$$\text{for } i=1,2,\cdots,n$$

このとき上限は、下限と$\sum_{c \in C_u}\hat{p}_c=1$より導けるので無視できる。$\eta_c \equiv \varepsilon_u q_c$と表わすと、結局$\hat{p}_c$の条件は、$\hat{p}_c \geq \eta_c$ for every $c \in C_u$

for every $u \in U_i$, for $i=1,\cdots,n$

また $\sum_{c \in C_u} \eta_c = \sum_{c \in C_u} \varepsilon_u q_c = \varepsilon_u < 1$ より

$\therefore \sum_{c \in C_u} \eta_c < 1$ for every $u \in U_i$, for $i=1, \cdots, n$

逆に η_c の系から、ε_u, q_c を逆算することもできるので、p_c, ε_u, q_c で作られた変動ゲームを $\hat{p}_c, \eta_c$ で表わしても、何ら支障はない。

(a) 変動ゲームの定義

(Def) Γ : 完全記憶をもつ展開形ゲーム

η : 各個人選択 c に対して正の確率を与える関数。ただし $\sum_{c \in C_u} \eta_c < 1$ ($\forall u \in U_i$, $i=1, \cdots n$) を満たす。

Γ の変動ゲーム $\hat{\Gamma} = (\Gamma, \eta)$ は、ゲームの構造 K, P, U, C, p, h は Γ と同じで、戦略に関して次のような制約をもつゲームである。

b_i が $\hat{\Gamma}$ の行動戦略である必要十分条件は、

① b_i は Γ の行動戦略である

② $b_{iu}(c) \geq \eta_c$ for every $c \in C_u$

for every $u \in U_i$

である。

(Def) $\hat{B}_i \equiv \hat{\Gamma}$ におけるプレイヤー i の行動戦略の集合

$\hat{b}=(\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_n)$ が $\hat{\Gamma}$ の行動戦略の組

$\underset{def}{\Leftrightarrow}$ $\hat{b}\in B$ s.t. $\hat{b}_i \in \hat{B}_i$ $(i=1,\cdots,n)$

$\hat{B} \equiv \hat{\Gamma}$ における行動戦略の組全体の集合

(b) 最適反応

$b=(b_1,\cdots,b_n)$: $\hat{\Gamma}$ の行動戦略の組

(Def) $\tilde{b}_i \in \hat{B}_i$ のとき

$\tilde{b}_i$ が $\hat{\Gamma}$ において b への最適反応である $\underset{def}{\Leftrightarrow}$ $H_i(b/\tilde{b}_i)=\max\limits_{b'_i\in\hat{B}_i} H(b/b'_i)$

(Def) $\tilde{b}=(\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_n)\in\hat{B}$ が $\hat{\Gamma}$ において b への最適反応である

$\underset{def}{\Leftrightarrow}$ 各 b_i が $\hat{\Gamma}$ において b への最適反応

(d) 均衡点

(Def) $b^*\in\hat{B}$ のとき

b^* が $\hat{\Gamma}$ における均衡点である $\underset{def}{\Leftrightarrow}$ b^* が $\hat{\Gamma}$ において自分自身への最適反応である

(e) 注意

Γにおける最適反応と$\hat{\Gamma}$における最適反応とは相異がある。ゆえにΓの均衡点と$\hat{\Gamma}$の均衡点は必ずしも一致しない。また$\hat{\Gamma}$には純粋戦略は存在しない。

3.3 完全均衡点

変動ゲームにおいては、到達されない情報集合はなくなる。すなわち変動ゲームの行動戦略の組をbとすると、任意の点xで$\rho(x,b)>0$となる。変動ゲーム$\hat{\Gamma}=(\Gamma,\eta)$の極限状態として$\Gamma$を考えることによって、より合理性な均衡点をみつけることができるだろう。そこで以下のように、変動ゲームの均衡点の収束する点として、完全均衡点を定義しよう。

(a) 変動ゲームの列

Γ: 完全記憶の展開形ゲーム

$\hat{\Gamma}^k=(\Gamma,\eta^k)$: Γの変動ゲーム

(Def) $\{\hat{\Gamma}^k\}$がΓの試験列 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\eta^k\to 0$ $(k\to\infty)$

b^* : Γの行動戦略の組

$\hat{b}^k$: $\hat{\Gamma}^k$の行動戦略の組

(Def) b^*が$\{\hat{\Gamma}^k\}$の極限均衡点である $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ b^*に収束するような点列$\{\hat{b}^k : \hat{b}^k$は$\hat{\Gamma}^k$の均衡点$\}$が存在する

(Lemma 3)

完全記憶をもつ展開形ゲームにおいて、試験列$\{\hat{\Gamma}^k\}$の極限均衡点b^*は、Γの均衡点である。

(証明)

$\hat{b}^k$が$\hat{\Gamma}^k$の均衡点だとすると

$$H_i(\hat{b}^k) \geqq H_i(\hat{b}^k/b_i) \quad \text{for every } b_i \in \hat{B}_i^k$$
$$\text{for} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

が成り立つ。$B_i^m \equiv \bigcap_{k \geqq m} \hat{B}_i^k$と定義すると、$m \leqq k$なる$k$に対して

$$H_i(\hat{b}^k) \geqq H_i(\hat{b}^k/b_i) \quad \text{for every } b_i \in B_i^m$$

が成り立つ。利得関数は、行動戦略の組の集合上の連続関数だから、極限$k \to \infty$をとってもこの不等式は成り立つ。

$$\therefore \quad H_i(b^*) \geqq H_i(b^*/b_i) \quad \text{for every } b_i \in B_i^m \quad \cdots\cdots ①$$

①は任意のmについて成り立ち、また

$$B_i = \overline{\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_i^m\right)}$$

であるから、H_iの連続性により

$$H_i(b^*) \geqq H_i(b^*/b_i) \quad \text{for every } b_i \in B_i$$
$$\text{for } i=1,2,\cdots,n$$

がいえる。これは、b^*がΓにおける均衡点であることを示している。

(証明終わり)

(b) 完全均衡点の定義

(定義) Γ：完全記憶をもつ展開形ゲーム b^*：Γの行動戦略の組 b^*がΓの完全均衡点である $\Updownarrow$ def 極限均衡点がb^*となるようなΓの試験列$\{\hat{\Gamma}^k\}$が少なくとも1つ存在する

Lemma 3 により、完全均衡点は、Nash 均衡点の特別な場合であるといえる。

(c) 完全均衡点の定義の解釈

b^*が極限均衡点ということは、kを十分大きくとれば、b^*にいくらでも近いような$\hat{\Gamma}^k$の均衡点が存在するということである。真に合理的な解ならば、プレイヤーの理性の微小な不完全さに対してもそれなりの有効性を保つべきである。この直感的考えを厳密に表現したものが、完全均衡点の定義である。もしb^*がどんな試験列の極限均衡点でもないとすると、b^*は、完全な理性からのちょっとした小さな脱線に対しても、非常に不安定であると考えることができる。

(d) 完全均衡点の部分ゲーム完全性

次に、この完全均衡点が部分ゲーム完全であることを証明しよう。この証明のために、摂動ゲームの均衡点の部分ゲーム完全に関するLemmaを用意する。

$\hat{\Gamma}=(\Gamma,\eta)$: Γの変動ゲーム

(Def) $\hat{\Gamma}'=(\Gamma',\eta)$が$\hat{\Gamma}$の部分ゲームである

$\Updownarrow$ def

ゲームの構造はΓの部分ゲームΓ'と同じで、ηをΓ'の個人選択Cだけに制限したη'をもつ、Γ'の変動ゲーム

このとき$\hat{\Gamma}'$はΓ'によって生成されたという。$\hat{\Gamma}$の均衡点$\hat{b}$が部分ゲーム完全であるとは、$\hat{b}$を任意の部分ゲーム$\hat{\Gamma}'$上に制限した$\hat{b}|\hat{\Gamma}'$が$\hat{\Gamma}'$の均衡点になっていることである。

(Lemma4)

Γ：完全記憶をもつ展開形ゲーム

$\hat{\Gamma}=(\Gamma, \eta)$：$\Gamma$の変動ゲーム

$\hat{\Gamma}$の任意の均衡点は、部分ゲーム完全均衡点である。

(証明)

$\hat{\Gamma}$の均衡点$\hat{b}$をΓの部分ゲームΓ'上に導入した行動戦略の組を$\hat{b}'$とする。このとき$\hat{b}'$は、Γ'によって生成される$\hat{\Gamma}$の部分ゲーム$\hat{\Gamma}'=(\Gamma', \eta')$の行動戦略の組になっている。$\hat{b}'$が$\hat{\Gamma}'$の均衡点でないと仮定して矛盾を導びこう。

Γ'において、プレイヤーiの利得関数をH_i'

とすると、$\hat{b}'$が$\hat{\Gamma}'$の均衡点でないならば、

$\exists j \in N$, $\exists b'_j$: jのΓ'における行動戦略；

$$H'_j(\hat{b}'/b'_j) > H'_j(\hat{b}')$$ となる。

このときb'_jから、Γ'の情報集合ではb'_jと同じで、それ以外では$\hat{b}$の要素$\hat{b}_j$に同じであるような$\hat{\Gamma}$の行動戦略b_jを考える。つまり、

$$b_j \quad \text{s.t.} \begin{cases} b_{ju} = b'_{ju} & u\text{は}\Gamma'\text{の情報集合} \\ b_{ju} = \hat{b}_{ju} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\hat{\Gamma}$は変動ゲームであるから、Γ'を構成している部分木Kに到達する確率は正である。

$$\therefore \quad H_j(\hat{b}/b_j) > H_j(\hat{b})$$

これは、$\hat{b}$が$\hat{\Gamma}$の均衡点であることに矛盾している。　(証明終わり)

(定理2.4)

Γ : 完全記憶をもつ展開形ゲーム

$\hat{b}$: Γの完全均衡点

Γの任意の部分ゲームΓ'に対して、$\hat{b}$によってΓ'上に導入される点$\hat{b}'$は、Γ'の完全均衡点である。

（系）

完全記憶な展開形ゲームΓの任意の完全均衡点は、部分ゲーム完全である。

（証明）

$\{\hat{\Gamma}^k\}$: $\tilde{b}$ を極限均衡点としてもつ試験列

$\{\hat{b}^k\}$: $\tilde{b}$ に収束する $\hat{\Gamma}^k$ の均衡点 $\hat{b}^k$ の列

$\hat{\Gamma}^{k\prime}$: Γ' によって生成される $\hat{\Gamma}^k$ の部分ゲーム

Lemma 4 により $\hat{b}^k$ は部分ゲーム完全だから、$\hat{b}^k$ によって $\hat{\Gamma}^{k\prime}$ 上に導入された行動戦略 $\hat{b}^{k\prime}$ は、$\hat{\Gamma}^{k\prime}$ の均衡点である。このとき $\hat{b}^{k\prime} \to \tilde{b}'$ $(k \to \infty)$ は明らかである。ゆえに $\{\hat{\Gamma}^{k\prime}\}$ は $\tilde{b}'$ を極限均衡点として持つ試験列になり、$\tilde{b}'$ は Γ' の完全均衡点である。

また Lemma 3 により完全均衡点は均衡点であるから系もあきらか。

（証明終わり）

3.4 局所戦略と完全均衡点

ここでは、各情報集合における局所戦略に関して、局所最適反応、局所均衡点の概念を導入する。そして、変動ゲームにおいて、この局所均衡と普通の均衡が同値であることを示し、それを用いて、完全均衡点を局所的立場で表現する。

(a) 表記上の約束

Γ：展開形ゲーム

b_i：個人プレイヤーiの行動戦略

b_{iu}：プレイヤーiの情報集合uにおける局所戦略

b_i/b'_{iu} ≡ 情報集合uにおける局所戦略に関してb_iによって与えられた戦略をb'_{iu}で置き換え、他の部分はb_iと同じであるようなプレイヤーiの行動戦略

$b/b'_{iu} \equiv b/(b_i/b'_{iu})$

B_{iu} ≡ uにおける局所戦略全体の集合

(b) 局所最適反応

$b=(b_1,\cdots,b_n)$：Γ の行動戦略の組

$\hat{b}_{iu}$：個人プレイヤー i の情報集合 $u\in U_i$ における局所戦略

(Def) $\tilde{b}_{iu}$ が b に対する局所最適反応 $\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ $H_i(b/\tilde{b}_{iu})=\max\limits_{b'_{iu}\in B_{iu}} H_i(b/b'_{iu})$

変動ゲーム $\hat{\Gamma}=(\Gamma,\eta)$ における局所最適反応も同様に定義できる。

$\hat{B}_{iu}\equiv\hat{\Gamma}$ における情報集合 u での局所戦略全体の集合

(Def) $\tilde{b}_{iu}$ が $\hat{\Gamma}$ での b への局所最適反応

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$H_i(b/\tilde{b}_{iu})=\max_{b'_{iu}\in\hat{B}_{iu}} H_i(b/b'_{iu})$$

(c) 条件付き実現確率

$\hat{\Gamma}=(\Gamma,\eta)$：完全記憶の展開形ゲーム Γ の変動ゲーム

$\hat{\Gamma}$ の行動戦略の組 b と情報集合 u の点 $x\in u$ に対して、条件付実現確率 $\mu(x,b)$ を次のように定義する。

$$\mu(x,b) \equiv \frac{\rho(x,b)}{\sum_{y \in u} \rho(y,b)}$$

任意の点 x で $\rho(x,b)>0$ だから、$\mu(x,b)$ は定義可能である。$\mu(x,b)$ は、行動戦略の組 b が実行されるとき、情報集合 u に到達したという前提で、$x \in u$ に到達する確率を意味している。

点 $x \in X$ と x のあとにくる終点 $z \in Z$、そして行動戦略の組 b で、もう1つの条件付き実現確率 $\mu(x,z,b)$ を次のように定義する。

$$\mu(x,z,b) \equiv \frac{\rho(z,b)}{\rho(x,b)}$$

$\mu(x,z,b)$ は、行動戦略の組 b が実行された場合、x を通過するという前提で、z に到達する確率を意味している。

(d) 条件付き期待利得

$\hat{\Gamma}=(\Gamma,\eta)$ の個人プレイヤー i の情報集合 u における、条件付き期待利得関数 H_{iu} を次のように定義する。

$$H_{iu}(b) \equiv \sum_{x\in u} \mu(x,b) \sum_{z \text{ after } x} \mu(x,z,b)\, \hat{h}_i(z)$$

$H_{iu}(b)$は、行動戦略の組bが実行され、プレイがuに到達したという条件でのプレイヤーiの期待利得である。

（Lemma 5）

Γ：完全記憶をもつ展開形ゲーム

$\hat{\Gamma}=(\Gamma, h)$：Γの変動ゲーム

$b=(b_1, \cdots, b_n)$：$\hat{\Gamma}$の行動戦略の組

$x \in u \in U_i \quad (i=1, \cdots, n)$

このとき条件付き実現確率$\mu(x,b)$は、b_iに依存しない。

（証明）

Γは完全記憶であるから、uの前にあるプレイヤーiの任意の情報集合$u' \in U_i$において、uの点に到達可能なu'の選択枝のすべては、同一な選択$c \in C_{u'}$に含まれる。よって、u'における局所戦略は、uに到達することを前提としている$\mu(x,b)$には無関係である。すなわち$\mu(x,b)$はb_iとは無関係。（証明終わり）

(Lemma 6)

Γ：完全記憶をもつ展開形ゲーム

$\hat{\Gamma}=(\Gamma,\eta)$：$\Gamma$の変動ゲーム

$b=(b_1,\cdots,b_n)$：$\hat{\Gamma}$の行動戦略の組

$\tilde{b}_{iu}$：個人プレイヤーiの情報集合uにおける、$\hat{\Gamma}$の局所戦略

$\tilde{b}_{iu}$が$\hat{\Gamma}$におけるbへの局所最適反応

$$\Updownarrow$$

$$H_{iu}(b/\tilde{b}_{iu}) = \max_{b'_{iu}\in\hat{B}_{iu}} H_{iu}(b/b'_{iu})$$

(証明)

uのあとに来ない終点の実現確率に対しては、uの局所戦略は無関係。$\tilde{b}_{iu}$が最適反応であるかどうかは、uを通過したあとの問題であるから、条件付き期待利得関数で調べれば必要かつ十分である。　(証明終わり)

(Lemma 7)

Γ：完全記憶をもつ展開形ゲーム

$\hat{\Gamma}=(\Gamma,\eta)$：$\Gamma$の変動ゲーム

$b=(b_1,\cdots,b_n)$：$\hat{\Gamma}$の行動戦略の組

$\tilde{b}_i$：$\hat{\Gamma}$におけるプレイヤーiの行動戦略

$\tilde{b}_i$が$\hat{\Gamma}$においてbへの最適反応である

$\Updownarrow$

$\tilde{b}_i$の任意の局所戦略$\tilde{b}_{iu}$が$\hat{\Gamma}$において$b/\tilde{b}_i$への局所最適反応である。

（証明）

($\Downarrow$)の証明。背理法を使う。

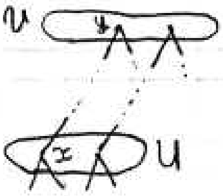
$\hat{\Gamma}$において、ある情報集合の局所戦略$\tilde{b}_{iu}$が$b/\tilde{b}_i$への最適反応でないとすると、ある$b'_{iu} \in \hat{B}_{iu}$が存在して、$H_i(b/\tilde{b}_i/b'_{iu}) > H_i(b/\tilde{b}_i/\tilde{b}_{iu}) = H_i(b/\tilde{b}_i)$となる。よって$\tilde{b}_i$は$b$への最適反応でない。これは矛盾。

($\Uparrow$)の証明。背理法を使う。

$\tilde{b}_i$の任意の局所戦略$\tilde{b}_{iu}$が$\hat{\Gamma}$において$b/\tilde{b}_i$への局所最適反応とする。このとき$\tilde{b}_i$がbへの最適反応でないと仮定して矛盾を導く。

b'_iを$\hat{\Gamma}$におけるbへの最適反応とする。このとき$\tilde{b}_{iu} \neq b'_{iu}$であるような$u \in U$が存存する。このような$u$の集合を$V_i$とおく。$V_i \neq \phi$であることは明らか。

Γは完全記憶であるから、情報集合u,vに対して、もしvの点のあとにくるようなuの点が1つでも存在するならば、uの任意の点は、vの点のあとにくる。



このとき情報集合uは、情報集合vのあとにくるという。

V_iの要素で、あとにくるような別のV_iの要素がないものが、必ず1つはあることは明らかである。それを$v(\in V_i)$とおこう。

ここで一般性を失わずに、$b_i'=b_i/\tilde{b}_{iv}$が$\hat{\Gamma}$においてbへの最適反応でないとすることができる。なぜならば、b_i'が最適反応であった場合は、b_iのかわりにb_i'を用いて証明の最初からやり直せばよい。そしてまた同じ問題が生じたときには、うまくいくまでくり返せばよい。情報集合の数は有限だから、有限回のくり返しでうまくいくだろう。

b'がbへの最適反応でないとすると

$$H_i(b/b_i/\tilde{b}_{iv}) < H_i(b/b_i') \quad \cdots ①$$

そこで、$\tilde{b}_{iv}$が$\hat{\Gamma}$においてb/b_iへの最適反応

であることをいえば、①に矛盾が生じる。

Lemma 5 より v の任意の点 x で、

$$\mu(x, b/b_i'/b_{iv}) = \mu(x, b/\hat{b}_i/b_{iv}) \quad \text{for every } b_{iv} \in \hat{B}_{iv} \quad \cdots ②$$

が成り立つ。さらに v のあとに V_i の要素である情報集合は存在しないから、v のあとの情報集合 $u \in U_i$ においては、$b_{iu}' = \tilde{b}_{iu}$ である。よって、v の任意の点 x と、x のあとにくる任意の終点 z に対して

$$\mu(x, z, b/b_i'/b_{iv}) = \mu(x, z, b/\hat{b}_i/b_{iv}) \quad \cdots\cdots ③$$
$$\text{for every } b_{iv} \in \hat{B}_{iv}$$

②,③より

$$H_{iv}(b/b_i'/b_{iv}) = H_i(b/\hat{b}_i/b_{iv}) \quad \text{for every } b_{iv} \in \hat{B}_{iv}$$

$\tilde{b}_{iv}$ は、$b/\hat{b}_i$ への局所最適反応だから Lemma 6 より、$\tilde{b}_{iv}$ は b/b_i' に対しても局所最適反応となる。

よって①に矛盾が生じ、(⇧)の証明は完了した。

（証明終わり）

(e) 局所均衡点

(定義)

$b^* = (b_1^*, \cdots, b_n^*)$: Γ の行動戦略の組

b^* が Γ の局所均衡点である

$\Updownarrow$

b_i^* の任意の局所戦略 b_{iu}^* が Γ において b^* への局所最適反応である。(for $i=1, \cdots, n$)

$\hat{\Gamma}$ の局所均衡点も同様に定義する。

(Lemma 8)

Γ: 完全記憶をもつ展開形ゲーム

$\hat{\Gamma} = (\Gamma, \eta)$: Γ の変動ゲーム

b^*: $\hat{\Gamma}$ の行動戦略の組

b^* が $\hat{\Gamma}$ の均衡点 $\Longleftrightarrow$ b^* が $\hat{\Gamma}$ の局所均衡点

(証明) Lemma 7 より、明らか。

(f) 局所極限均衡点

Γ: 完全記憶をもつ展開形ゲーム

$\{\hat{\Gamma}^k\}$: Γ の試験列

b^*: Γ の行動戦略の組

$\hat{b}^k$: $\hat{\Gamma}^k$ の行動戦略の組

(Def) b^* が $\{\hat{\Gamma}^k\}$ の局所極限均衡点である $\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ b^* に収束するような点列 $\{\hat{b}^k : \hat{b}^k$ は $\hat{\Gamma}^k$ の局所均衡点$\}$ が存在する

(定理 2.5)

Γ : 完全記憶をもつ展開形ゲーム

b^* : Γ の行動戦略の組

b^* が完全均衡点である $\Longleftrightarrow$ 極限均衡点が b^* となるような試験列 $\{\hat{\Gamma}^k\}$ が少なくとも 1 つ存在する

(証明) Lemma 8 と完全均衡点の定義より明らか。

3.5 代理標準形と完全均衡点の存在定理

ここでは、代理標準形の概念を導入する。代理標準形は、展開形ゲームから作られ、代理標準形のプレイヤーは、各情報集合の代理人と考える。代理人は、彼の情報集合が属しているプレイヤーの期待利得を受け取る。この代理標準形は、展開形ゲームの完全均衡点を計算するために必要なすべての情報を保持している。すなわち完全記憶を持つ展開形ゲームにおいて、完全均衡点の存在は、この代理標準形によって証明できる。

(a) 標準形の定義

標準形ゲームは、プレイヤー集合 $N=\{1,\cdots,n\}$ と、空でなく互いに共通部分をもたない純粋戦略の集合 $\Pi_i\,(i=1,\cdots,n)$ と、$\Pi=\Pi_1\times\cdots\times\Pi_n$ 上に定義された期待利得関数 $H_i\,(i=1,\cdots,n)$ から構成される。$H(\pi)\equiv(H_1(\pi),\cdots\cdots,H_n(\pi))$ は、純粋戦略の組 π に対する各プレイヤー i の期待利得 $H_i(\pi)$ を成分とするベクトルである。そして、標準形ゲーム G は、次のように表記する。

$$G=(\Pi_1,\cdots,\Pi_n\,;\,H)$$

標準形ゲームの戦略は、純粋戦略の集合上の混合戦略を考えれば十分である。混合戦略は、展開形と同様に定義され、プレイヤーiの混合戦略をq_i，q_i全体の集合をQ_i，また、$Q\equiv Q_1\times\cdots\times Q_n$とする。$Q$の要素を混合戦略の組という。

(b) 代理標準形

展開形ゲームの純粋戦略の集合$\Pi_i\,(i=1,\cdots,n)$と期待利得ベクトルHから、標準形G_Γを作ることができる。しかし、ΓをG_Γに標準化するとき、Γの持っている重要な情報のいくつかが失われてしまう。そこで、完全記憶の展開形ゲームに対して、少なくとも完全均衡に関する情報は保持されるような標準形を作る。

（代理標準形の作り方）

$\Gamma=(K,P,U,C,p,h)$において、個人プレイヤーの情報集合のすべてに番号をつける。

$u_1,u_2,\cdots\cdots\cdots,u_m$ （mは個人情報集合の総数）

u_iにおける選択の集合をΦ_iとする。

このとき情報集合u_iの代理人として、プレイヤーiを設定する。するとプレイヤーがm人である標準形$G=(\Phi_1, \cdots, \Phi_m; E)$を新たに作ることができる。期待利得ベクトル$E$は、次のように作る。

$\Phi \equiv \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_m$：$G$の純粋戦略の組の集合

$\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m) \in \Phi$

$E_i(\varphi) \equiv H_j(\pi)$　ただしu_iはプレイヤーjの情報集合で、πは各情報集合u_k $(k=1,2,\cdots m)$で、$\varphi_k \in \Phi_k$を選択するような純粋戦略の組である

$E(\varphi) \equiv (E_1(\varphi), \cdots, E_m(\varphi))$

このとき$G=(\Phi_1, \cdots, \Phi_m; E)$を、$\Gamma$の代理標準形という。

φに対するプレイヤーiの期待利得は、φと同値なΓの戦略の組πに対する、u_iが属すΓのプレイヤーの期待利得に等しい。

期待利得E_iは、混合戦略についても、通常の方法で拡張できる。

(c) 戦略の対応

展開形ゲームΓから生成された摂動標準形ゲームをGとする。Γの行動戦略の組$b=(b_1,\cdots,b_n)$から、Gの混合戦略の組$q=(q_1,\cdots,q_m)$を次のように作ることができる。

$$q_i(\varphi_i) \equiv b_{ju_i}(c) \quad \left(\text{ただし } \varphi_i = c \in \Phi_i = C_{u_i},\ u_i \in U_j \right)$$

$$\text{for every } \varphi_i \in \Phi_i$$

$$\text{for } i = 1, 2, \cdots, m$$

このとき、qはbによってG上に導入される、という。逆にqからbを作りだすことも上の方法を逆に試みれば、すぐできる。このとき、bはqによってΓ上に導入される、という。

この導入は、一対一対応の上への写像と考えることができ、Γの行動戦略の組とGの混合戦略の組は、一対一に対応しているといえる。

(c) 変動代理標準形

展開形ゲームΓから生成される代理標準形を$G=(\Phi_1,\cdots,\Phi_m;E)$とする。$\Gamma$の変動ゲーム$\hat{\Gamma}=(\Gamma,\eta)$から$G$の変動ゲーム$\hat{G}=(G,\eta)$を作る。

$\hat{G}=(G,\eta)$は、ゲームの構成はGと等しいが、戦略に次のような制約があるゲームである。

qが$\hat{G}$の混合戦略の組である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ qがGの混合戦略の組 $q_i(c)\geq\eta_c$ for every $c\in\Phi_i$ for $i=1,2,\cdots,m$

このとき$\hat{G}$の任意の混合戦略の組は、$\hat{\Gamma}$の行動戦略の組によって導入できる。また逆もいえる。$\hat{G}$を$\hat{\Gamma}$の変動代理標準形という。

同様に、$\hat{G}=(G,\eta)$から$\hat{\Gamma}=(\Gamma,\eta)$を作ることもできる。

$\hat{G}$における混合戦略全体を$\hat{Q}_i(i=1,\cdots,m)$と表記する。

(d) 変動代理標準形の均衡点

$\tilde{q}_i$: $\hat{G}=(G,\eta)$におけるプレイヤーiの混合戦略

q : $\hat{G}$の混合戦略の組

(Def) $\hat{G}$において$\tilde{q}_i$はqに対するプレイヤーiの最適反応である $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $E_i(q/\tilde{q}_i)=\max\limits_{q_i'\in\hat{Q}_i} E_i(q/q_i')$

(Def) $\hat{G}$において$\tilde{q}=(\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_m)$は$q$に対する最適反応である $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各$\tilde{q}_i$が$\hat{G}$におけるqへの最適反応である

(Def) $\hat{G}$の混合戦略の組q^*が均衡点である $\Longleftrightarrow$ q^*が$\hat{G}$において自分自身への最適反応である

(Lemma 9)

Γ : 完全記憶の展開形ゲーム

$\hat{\Gamma}=(\Gamma,\eta)$: Γの変動ゲーム

$\hat{G}=(G,\eta)$: $\hat{\Gamma}$の変動代理標準形ゲーム

$\hat{\Gamma}$の均衡点は$\hat{G}$の各均衡点から導入される。また逆もいえる。

（証明）

$\hat{\Gamma}$の局所最適反応が$\hat{G}$の最適反応と同じことであることは明らか。よってLemma 8よりLemma 9はすぐにでてくる。（証明終わり）

Lemma 9より、$\hat{\Gamma}$の均衡点と$\hat{G}$の均衡点は、導入関係において、一対一に対応していることがわかった。

(e) 代理標準形の完全均衡点

$G=(\Phi_1,\cdots,\Phi_m;\ E)$：標準形ゲーム

(Def) $\{\hat{G}^k\}$が試験列である $\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ Gの変動ゲーム$\hat{G}^k=(G,\eta)$の列で、

$\eta_c^k \to 0\ (k\to\infty)$ for every $c\in\Phi_i$

を満たす

(Def) Gの行動戦略の組q^*が$\{\hat{G}^k\}$の極限均衡点である

$\Updownarrow$ def

$k\to\infty$のときq^*に収束するような$\hat{G}_k$の均衡点$\hat{q}^k$の列$\{\hat{q}^k\}$が存在する

(Def)　Gの混合戦略の組σ^*が完全均衡点である

$$\Updownarrow \text{def}$$

σ^*を極限均衡点とするような試験列$\{\hat{G}^k\}$が存在する

> (Lemma 10)
>
> 試験列$\{\hat{G}^k\}$の極限均衡点は、Gの均衡点である

(証明)　Lemma 3と同様に証明できる

> (定理2.6)
>
> Γ：完全記憶をもつ展開形ゲーム
>
> G：Γの代理標準形
>
> Γの完全均衡点は、Gの完全均衡点によってΓ上に導入される。また逆もいえる。

(証明)

Lemma 9により、$\hat{\Gamma}^k=(\Gamma, \eta^k)$と$\hat{G}^k=(G, \eta^k)$の均衡点は互いに導入される。よってお互いの極限均衡点の互いに導入される。

(証明終わり)

(f)　完全均衡点の存在定理

以下では、完全記憶の展開形ゲームは、少

なくとも1つの完全均衡点を持つことを証明する。

（定理2.7）

標準形ゲームGは、少なくとも1つの完全均衡点をもつ

（証明）

変動標準形 $\hat{G}=(G,\eta)$ が、混合戦略で均衡点を少なくとも1つ持つことは、定理2.2より明らか。Gの試験列 $\{G^k\}$ の任意の変動標準形 $\hat{G}^k$ は、均衡点 q^k をもつ。Gの混合戦略の組の集合Qは、ユークリッド空間の有界閉集合であるから $\{q^k\}$ は集積点 q^* をもつ。すなわち $\{q^k\}$ は q^* に収束する部分列 $\{q^{k_1}, q^{k_2}, \cdots\}$ をもつ。このとき q^{k_n} に対応する変動ゲーム $\hat{G}^{k_n}$ の列 $\{\hat{G}^{k_1}, \hat{G}^{k_2}, \cdots\}$ は $\{\hat{G}^k\}$ の部分列である。この $\{\hat{G}^{k_n}\}$ は q^* を極限均衡点とする試験列である。よって q^* はGの完全均衡点である。

（証明終わり）

（定理 2.8）

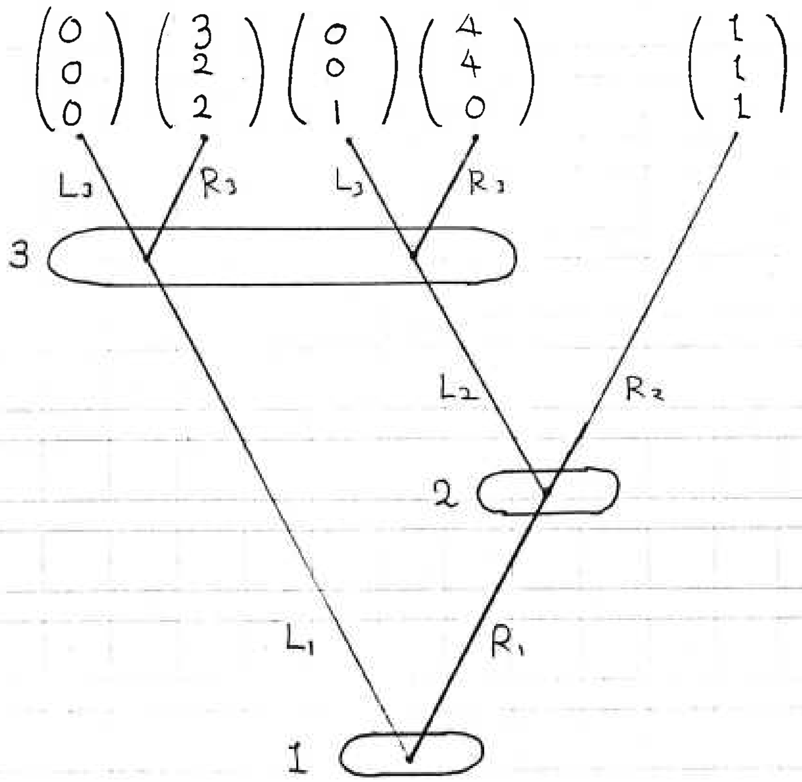
完全記憶をもつ展開形ゲームは、少なくとも 1 つの完全均衡点をもつ.

（証明）

定理 2.7 により、Γ の代理標準形は、完全均衡点をもつことが証明できる。定理 2.6 により、Γ も完全均衡点をもつことがいえる。

3.6 例

2.1の図1の例について、完全均衡点を求めてみよう。



プレイヤーiがR_iを選択する確率をP_iとすると、このゲームの行動戦略の組は(P_1, P_2, P_3)で表現できる。プレイヤーiの期待利得関数を$H_i(P_1, P_2, P_3)$とする。(P_1, P_2, P_3)は3次元空間の点として表現できるので、グラフにより均衡点を求めていく。

まずプレイヤー1の反応戦略を考える。

$$H_1(p_1, p_2, p_3) = p_1\cdot p_2 + 4\,p_1(1-p_2)\cdot p_3 + 3(1-p_1)\cdot p_3$$

$$= p_1(p_2 + p_3 - 4\,p_2\cdot p_3) + 3\,p_3$$

プレイヤーの最適反応は、

$p_2 + p_3 - 4p_2p_3 > 0$ のとき $p_1 = 1$

$\quad ; \quad = 0$ のとき $0 \leqq p_1 \leqq 1$

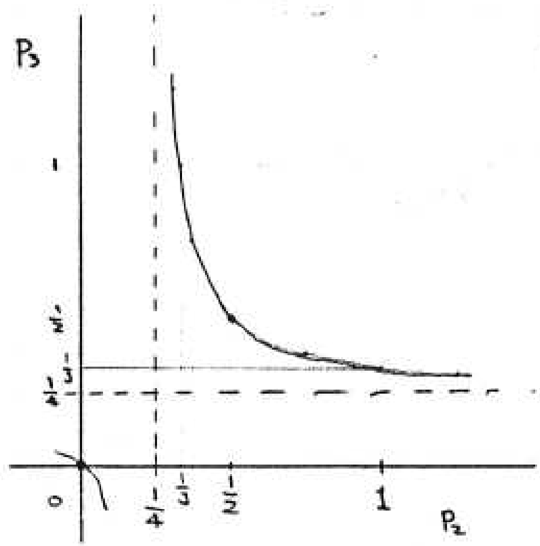
$\quad ; \quad < 0$ のとき $p_1 = 0$

これをグラフで表わす。

$p_2 + p_3 - 4p_2p_3 = 0$ のとき

$$p_3 = \frac{\frac{1}{16}}{p_2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$$

$P = \dfrac{\frac{1}{16}}{P_2 - \frac{1}{4}} + \dfrac{1}{4}$ のグラフ



プレイヤー1 の P_2, P_3 に対する最適反応

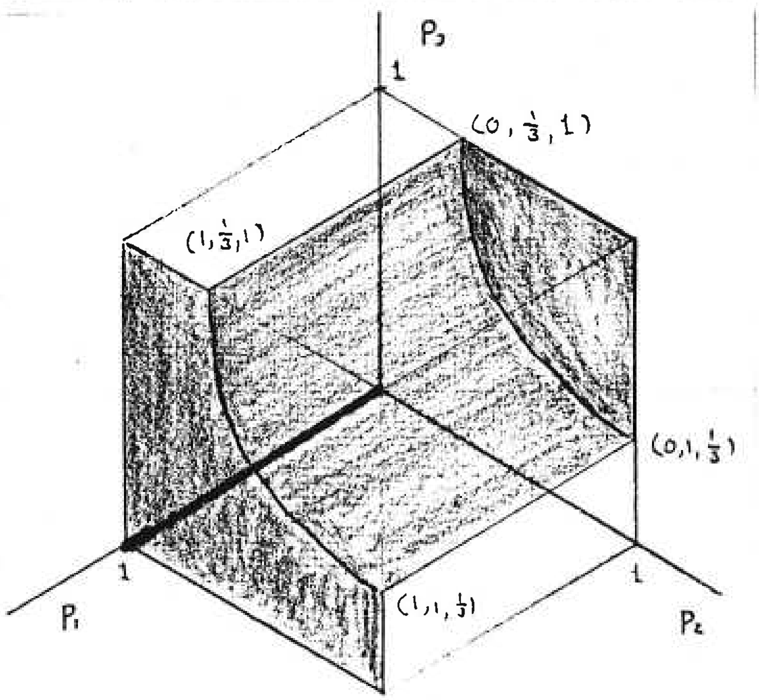


図1

図の — の部分は、$0 \le P_1 \le 1$, $P_2 = P_3 = 0$ である。

ここで、変動ゲームの場合も考える

$$\varepsilon_1 \leqq P_1 \leqq \varepsilon_1'$$

$$\varepsilon_2 \leqq P_2 \leqq \varepsilon_2'$$

$$\varepsilon_3 \leqq P_3 \leqq \varepsilon_3'$$ とする。

$P_2 + P_3 - 4P_2P_3 > 0$ のとき $P_1 = \varepsilon_1$

〃 $= 0$ のとき $\varepsilon_1 \leqq P_1 \leqq \varepsilon_1'$

〃 < 0 のとき $P_1 = \varepsilon_1'$

変動ゲームにおけるプレイヤー1の P_1, P_2 に対する最適反応は、次のグラフで表わせる。

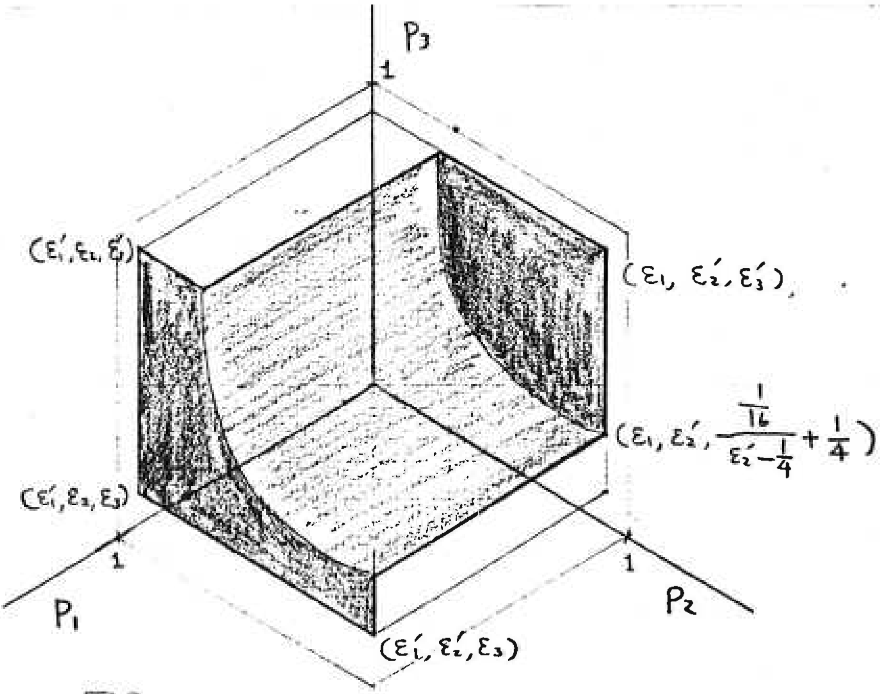


図2

図1と比べたとき、— の部分が消滅していることがわかる。その他の部分は概形をとどめたまま縮小している。

同様にプレイヤー２の最適反応戦略について考える。

$$H_2(p_1, p_2, p_3) = p_2(p_1 - 4p_1 p_3) + 4p_1 p_3 + 2(1-p_1)p_3$$

$p_1 - 4p_1 p_3 > 0$ のとき $p_2 = 1$

〃 $= 0$ のとき $0 \leqq p_2 \leqq 1$

< 0 のとき $p_2 = 0$

プレイヤー２の p_1, p_3 に対する最適反応のグラフ。

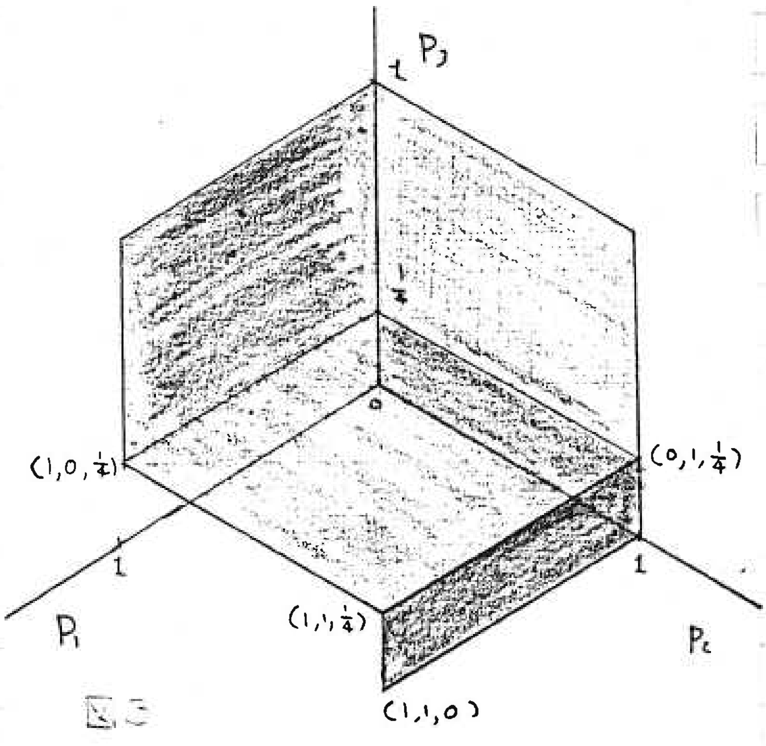


図2

□の部分は

$p_1 = 0$, $0 \leqq p_1, p_2 \leqq 1$

である。

変動ゲームにおける、プレイヤー２の p_1, p_3 に対する最適反応のグラフは、次のようになる。

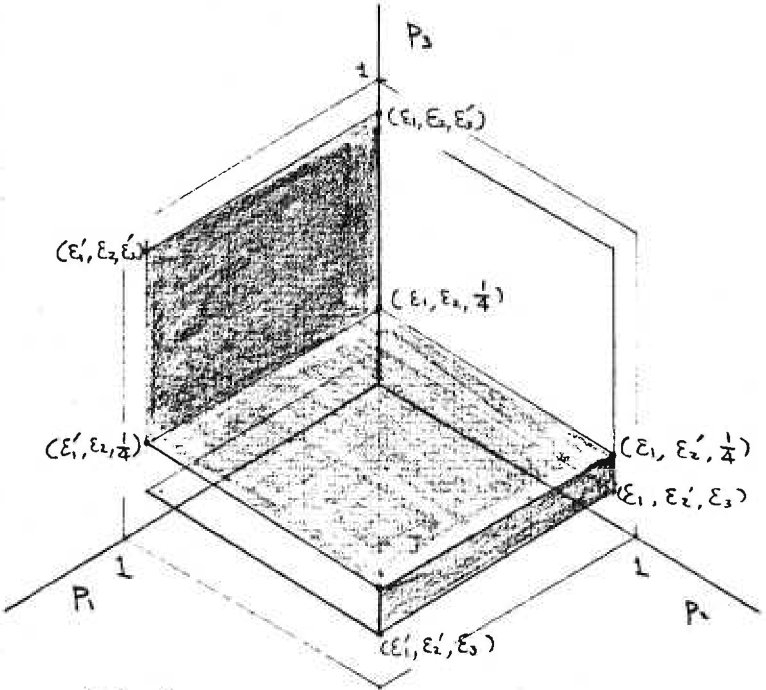


図4

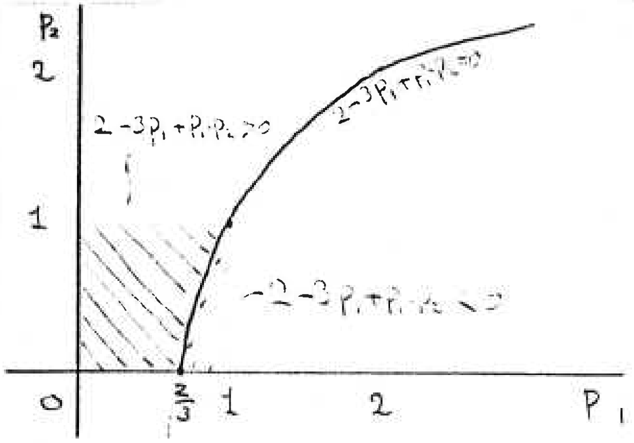
図3と比べると、$\boxed{\ }$の部分が消滅し、そのほかの部分は、概形をとどめて縮小している。

プレイヤー3の最適反応戦略を考える。

$$H_3(p_1, p_2, p_3) = p_3(2 - 3p_1 + p_1 \cdot p_2) + p_1 \cdot p_2 + p_2(1 - p_2)$$

最適反応戦略は

$$2 - 3p_1 + p_1 \cdot p_2 > 0 \quad \text{のとき} \quad p_3 = 1$$
$$= 0 \quad \text{のとき} \quad 0 \leq p_3 \leq 1$$
$$< 0 \quad \text{のとき} \quad p_3 = 0$$



プレイヤー3のP1, P2に対する最適反応のグラフ。

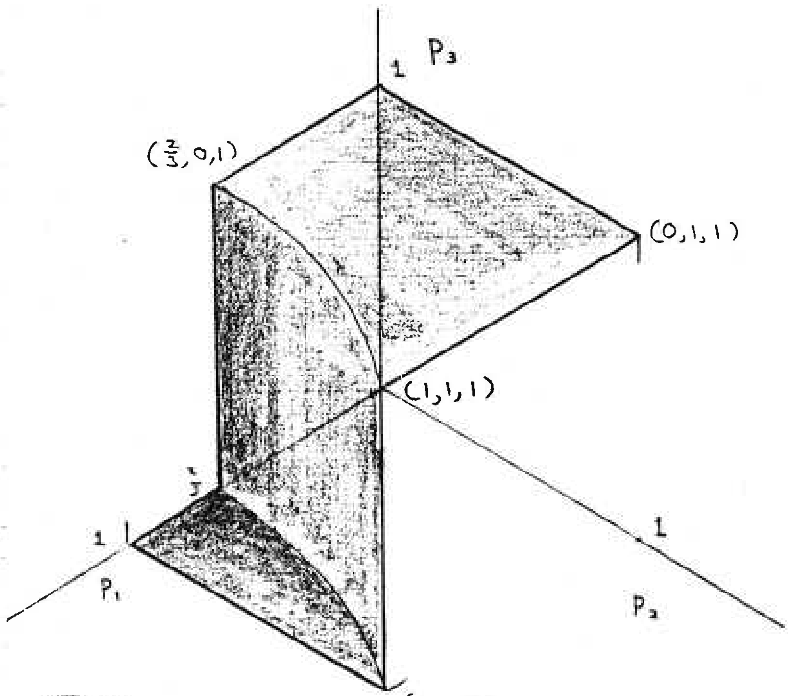


図5

変動ゲームにおけるグラフ。

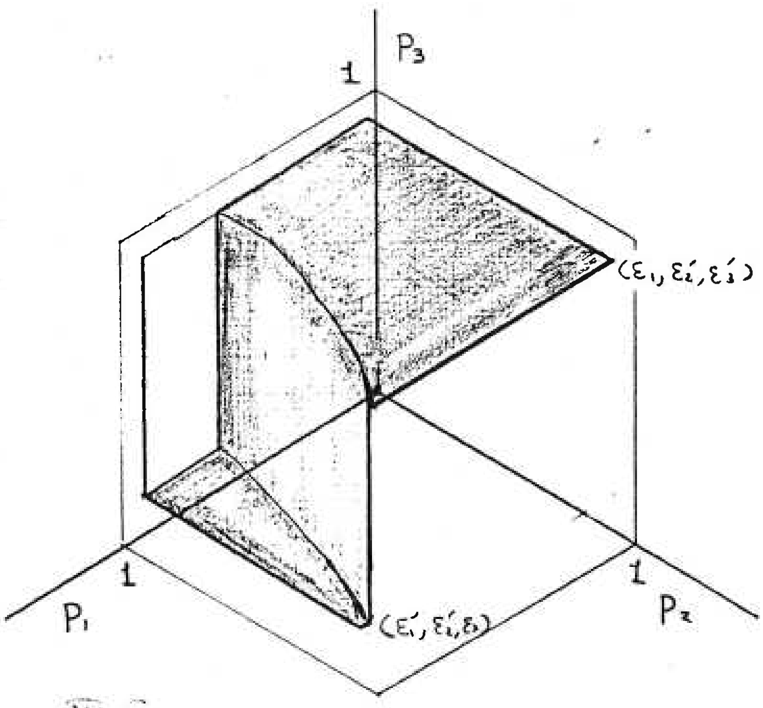


図6

この場合、変動ゲームにしたために消滅する部分はない。

このとき、このゲームのNash均衡点は、図1と図3と図4の交わりである。

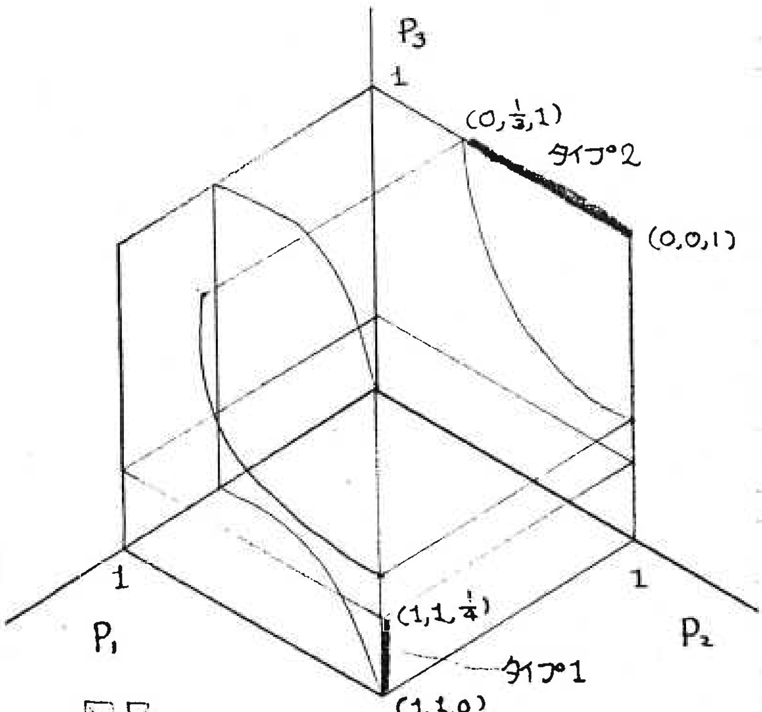


図7

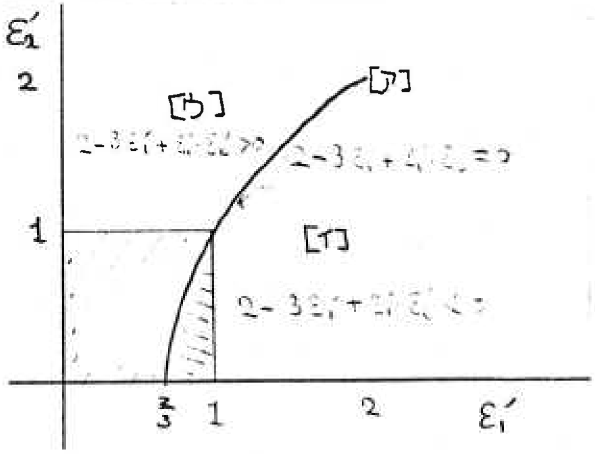
図7より、Nash均衡点の集合は、

$$\begin{cases} P_1 = 0 \\ \frac{1}{3} \leqq P_2 \leqq 1 \\ P_3 = 1 \end{cases} \quad (\text{タイプ}2)$$

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = 1 \\ 0 \leqq P_3 \leqq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\text{タイプ}1)$$

である。

次に変動ゲームのNash均衡点について考えてみよう。図2と図3と図5の交わりを考えるわけであるが、εに関して3つの場合に分ける必要がある。



$\varepsilon_1, \varepsilon_1', \varepsilon_2, \varepsilon_2', \varepsilon_3, \varepsilon_3'$ は十分小さいとする。

[ア] $2-3\varepsilon_1'+\varepsilon_1'\cdot\varepsilon_2' = 0$

のとき

[イ]　$2-3\varepsilon_1' + \varepsilon_1'\cdot\varepsilon_2' < 0$　のとき

[ウ]　$2-3\varepsilon_1' + \varepsilon_1'\cdot\varepsilon_2' > 0$　のとき

以上、[ア][イ][ウ]の3つの場合に分けることができ、それぞれの場合についてNash均衡点を求める。わかりやすくするために、まず図2と図4の交わりを考える。そして、これと図6の交わりを、[ア][イ][ウ]の場合について考えると次のようになる。

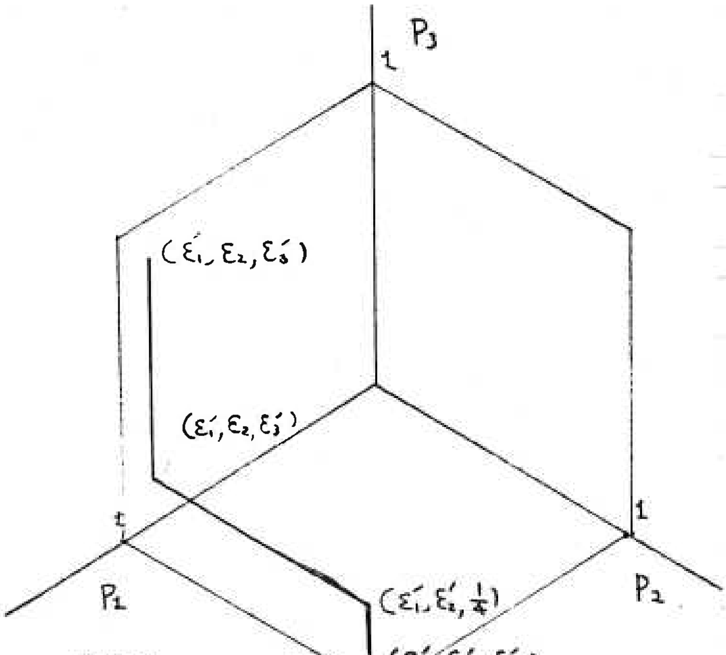
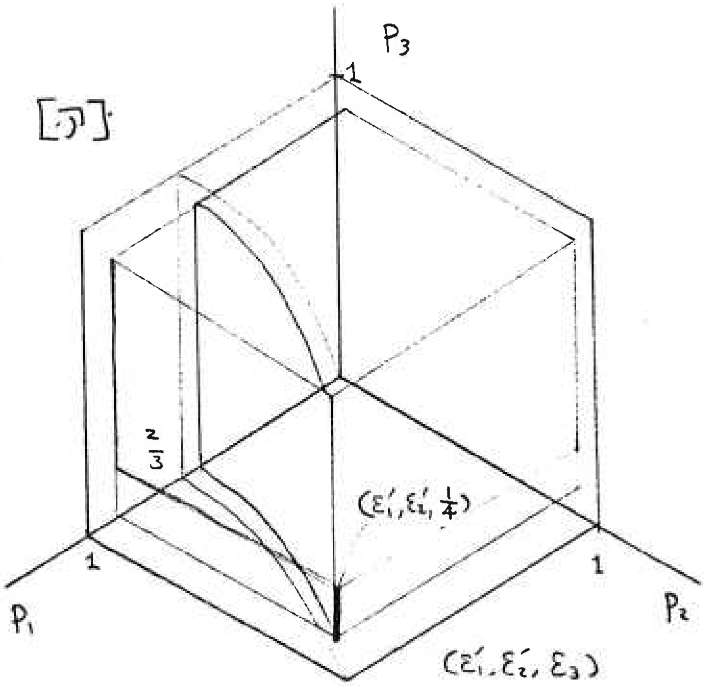


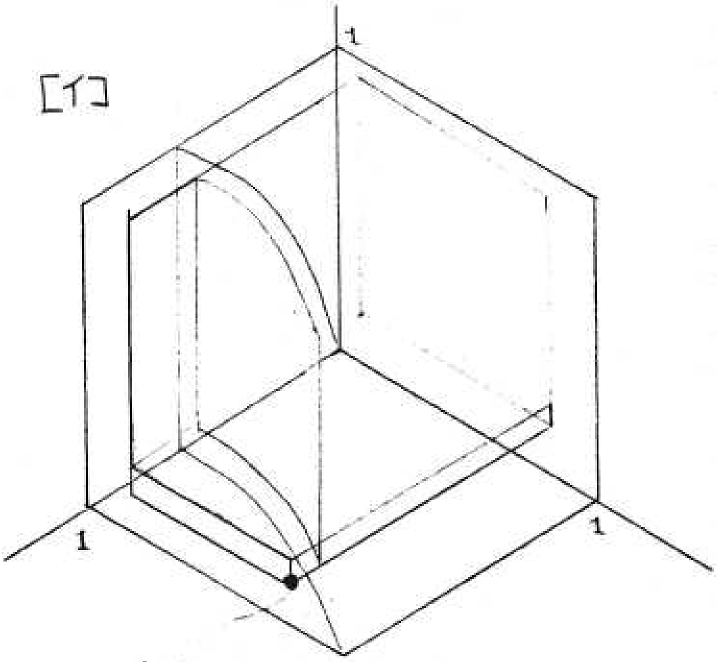
図 [illegible]



[ア]の場合

Nash均衡点は、

$$\begin{cases} P_1 = \varepsilon_1' \\ P_2 = \varepsilon_2' \\ \varepsilon_3 \leqq P_3 \leqq \frac{1}{4} \end{cases}$$

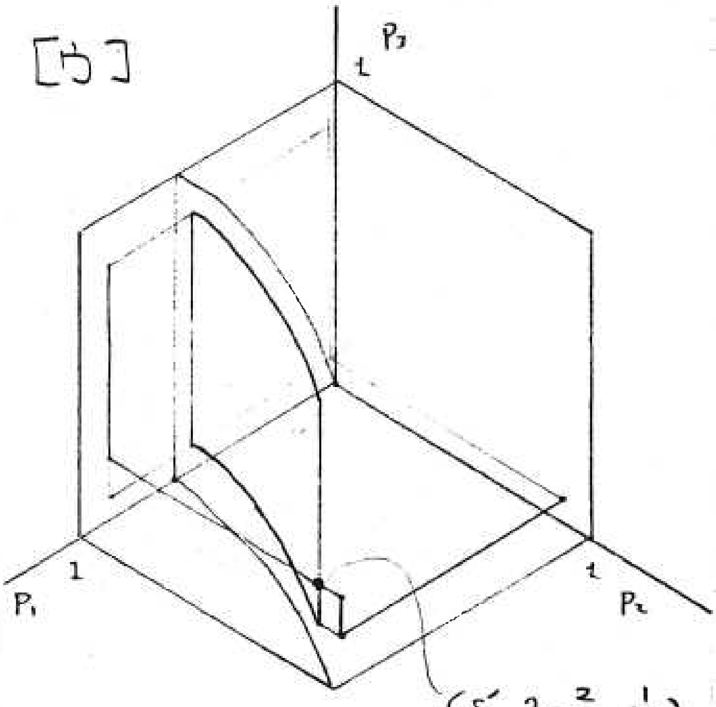


[イ]の場合

Nash 均衡点は

$$\begin{cases} P_1 = \varepsilon_1' \\ P_2 = \varepsilon_2' \\ P_3 = \varepsilon_3 \end{cases}$$

ただ1つ。



[ウ]の場合

Nash 均衡点は

$$\begin{cases} P_1 = \varepsilon_1' \\ P_2 = 3 - \dfrac{2}{\varepsilon_1'} \\ P_3 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

ただ1つ。

以上より、変動ゲームが[ア][イ][ウ]のどのタイプかによって、均衡点の集合の状況が異なることがわかる。

[ア]の条件を満たす変動ゲームの試験列の極限均衡点は、

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = 1 \\ 0 \leqq P_3 \leqq \frac{1}{4} \end{cases}$$

[イ] ：

① $\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = 1 \\ P_3 = 0 \end{cases}$

[ウ] ：

② $\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = 1 \\ P_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$

完全均衡点は、ある試験列の極限均衡点であるから、タイプ1のNash均衡点（$P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $0 \leqq P_3 \leqq \frac{1}{4}$）は完全均衡点である。

ランダムに変動ゲームの列を作るとすると、その極限均衡点は、ほとんど①（$P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$）か②（$P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = \frac{1}{4}$）のどちらかであり、①②以外の点（$P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $0 < P_3 < \frac{1}{4}$）である確率は0である。よって完全均衡点の中でも、①と②は、それ以外の完全均衡点より安定性が高いといえるだろう。

完全均衡点のまとめ

完全均衡点の特徴

(i) プレイヤーの合理性の微小な不完全さに対して安定である。

(ii) 到達されない情報集合における不合理な行動が除外される。

(iii) 完全記憶をもつ展開形ゲームで必ず存在する。

(iv) 計算上不便である。

第3章　P_1均衡点とP_2均衡点

この章では、新たに弱支配合理性という概念を導入し、この関点から Nash 均衡点を弱めた新しい均衡点（P_1均衡点・P_2均衡点）を定義する。

§1　弱支配合理性

1.1　純粋戦略の支配

次のような双行列ゲームでは、プレイヤー1にとってDという戦略は、プレイヤー2がいかなる戦略をとろうとも、戦略Uよりは劣る戦略である。プレイヤー1が、合理的なプレイヤーであるならば、絶対に戦略Dをとることはないであろう。このような時、戦略Uは戦略Dを支配するという。またプレイヤー2にとって戦略Rは、戦略Lよりどんな場合でも劣っているから、戦略Lは戦略Rを支配するということができる。

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{player 2} \\
 & \begin{array}{cc} \quad L & \quad R \end{array} \\
\text{player 1} \begin{array}{c} U \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2 & 1,1 \\ 1,1 & 0,0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

まず、標準形ゲームにおいて支配を厳密に定義してみよう。

(定義)

G：標準形ゲーム

Π：Gの純粋戦略の組の集合

π_i', π_i''：プレイヤーiの純粋戦略

π_i'がπ_i''を支配している $\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}} H_i(\pi/\pi_i') > H_i(\pi/\pi_i'')$

for every $\pi \in \Pi$

π_i'がπ_i''を支配しているとき、π_i' dom π_i''と記す。

標準形ゲームにおいて、合理的なプレイヤーは、支配される戦略はとらないであろう。ゆえに合理的な均衡点においては、支配されるような戦略は、確率0で用いられる、すなわち用いられることはないはずである。ここでは、Nash均衡点と支配の関係を調べてみよう。

(定理3.1)

G：標準形ゲーム

Q：Gの混合戦略の組の集合

Π_i：プレイヤーiの純粋戦略の集合

$q^* \in Q$

q^* が Nash 均衡点である

$$\Updownarrow$$

任意のプレイヤー i の純粋戦略 $\pi_i, \pi_i' \in \Pi_i$ が

$H_i(q^*/\pi_i) > H_i(q^*/\pi_i')$ を満たすとき $q_i^*(\pi_i') = 0$

（証明）

（$\Downarrow$）の証明

Nash 均衡点の定義より

$$\begin{aligned} 0 &\leq H_i(q^*) - H_i(q^*/q_i) \\ &= \sum_{\pi_i' \in \Pi_i} q_i^*(\pi_i') H_i(q^*/\pi_i') - \sum_{\pi_i \in \Pi_i} q_i(\pi_i) H_i(q^*/\pi_i) \\ &= \sum_{\pi_i' \in \Pi_i} \sum_{\pi_i \in \Pi_i} q_i^*(\pi_i') q_i(\pi_i) \left(H_i(q^*/\pi_i') - H_i(q^*/\pi_i) \right) \end{aligned}$$

$$\text{for all } q_i \in Q_i$$

$H_i(q^*/\pi_i) > H_i(q^*/\pi_i')$ となる $\pi_i, \pi_i' \in \Pi_i$ が存在するとき、$q_i \equiv \begin{cases} q_i(\pi_i) = 1 \\ q_i(\pi_i'') = 0 \quad (\pi_i'' \neq \pi_i,\ \pi_i'' \in \Pi_i) \end{cases}$

と定義した混合戦略に対して

$$H_i(q^*) - H_i(q^*/q_i) = q_i^*(\pi_i') \left(H_i(q^*/\pi_i') - H_i(q^*/\pi_i) \right) \geqq 0$$

ところが $H_i(q^*/\pi_i') - H_i(q^*/\pi_i) < 0$ であるから

$$\therefore \quad q_i^*(\pi_i') = 0$$

(ii) の証明

q_i^* が q^* に対する最適反応となっていることを示す。

任意の混合戦略 $q_i \in Q_i$ に対して

$$H_i(q^*) - H_i(q^*/q_i)$$
$$= \sum_{\pi_i' \in \Pi_i} \sum_{\pi_i \in \Pi_i} q_i^*(\pi_i') q_i(\pi_i) \left(H_i(q^*/\pi_i') - H_i(q^*/\pi_i) \right)$$
$$\geqq 0$$

$\because$ $H_i(q^*/\pi_i') - H_i(q^*/\pi_i) < 0$ のとき

$q_i^*(\pi_i') = 0$ だから

よって q^* は Nash 均衡点である。

（証明終わり）

この定理より、Nash 均衡点は、支配される戦略は用いないということがすぐわかるだろう。なぜならば $H_i(\pi/\pi_i) > H_i(\pi/\pi_i')$ (for all $\pi \in \Pi$) であるならば $H_i(q^*/\pi_i) > H_i(q^*/\pi_i')$ であるからである。

またこの定理が Nash 均衡点の必要十分条件を示していることは、たいへん興味深いことである。

同様に展開形ゲームに対しても支配が定義できる。

(定義)

Γ：展開形ゲーム

Π：Γの純粋戦略の組の集合

Π_{iu}：情報集合$u \in U_i$におけるプレイヤーiの局所純粋戦略の集合

$\pi'_{iu}, \pi''_{iu} \in \Pi_{iu}$とするとき

π'_{iu}がπ''_{iu}を支配している $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $H_i(\pi/\pi'_{iu}) > H_{iu}(\pi/\pi''_{iu})$ for every $\pi \in \Pi$

π'_{iu}がπ''_{iu}を支配しているとき、π'_{iu} dom π''_{iu}と記す。

完全記憶をもつ展開形ゲームは、同値な代理標準形に対応させることができるから、定理3.1をこのような展開形に対して拡張しても成り立つであろう。

1.2 純粋戦略の弱支配

次に支配を少し弱めた弱支配を考えよう。ある戦略が別の戦略を支配するとは、支配する戦略が、支配される戦略に狭義に優っていることと定義された。そこで、広義に優っているような場合に弱支配を定義していこう。

次のような双行列ゲームでは、プレイヤー1にとって、Dという戦略は、プレイヤー2がいかなる戦略をとろうとも、戦略Uより劣ることはあっても優ることはない。

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{player 2} \\
 & & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\
\text{player 1} & \begin{array}{c} U \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

戦略UはDを支配しているわけではないが、合理的なプレイヤーならばUをとると考えたほうが自然であろう。このようなとき、戦略Uは戦略Dを弱支配するという。同様に、プレイヤー2にとっても、戦略Lは戦略Rを弱支配しているといえる。

それでは、この弱支配を標準形と展開形に対し、厳密に定義しよう。

（定義）

G：標準形ゲーム

Π：Gの純粋戦略の組の集合

π_i', π_i''：プレイヤーiの純粋戦略

π_i'がπ_i''を**弱支配**している

$$\Updownarrow \text{def}$$

任意の$\pi \in \Pi$に対して　$H_i(\pi/\pi_i') \geq H_i(\pi/\pi_i'')$

少なくとも1つの$\pi \in \Pi$

に対して　$H_i(\pi/\pi_i') > H_i(\pi/\pi_i'')$

（定義）

Γ：展開形ゲーム

Π：Γの純粋戦略の組の集合

π_{iu}', π_{iu}''：プレイヤーiの情報集合uにおける局所純粋戦略

π_{iu}'がπ_{iu}''を**弱支配**している

$$\Updownarrow \text{def}$$

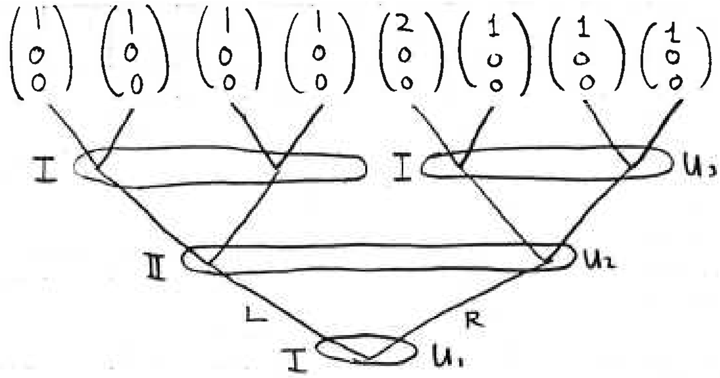
任意の$\pi \in \Pi$に対して　$H_i(\pi/\pi_{iu}') \geq H_i(\pi/\pi_{iu}'')$

少なくとも1つの$\pi \in \Pi$

に対して　$H_i(\pi/\pi_{iu}') > H_i(\pi/\pi_{iu}'')$

π_i' が π_i'' を弱支配しているとき π_i' wdom π_i''，π_{iu}' が π_{iu}'' を弱支配しているとき π_{iu}' wdom π_{iu}'' と記す。

展開形ゲームの弱支配の例を示そう。



左の展開形ゲームでは、情報集合 u_1 において、局所純粋戦略 R は L を弱支配はしているけれども、支配はしていない。

1.3 弱支配合理性

合理的なプレイヤーならば、弱支配されるような戦略は用いないであろうと考えられる。よって、合理的な均衡点ならば、各プレイヤーの均衡戦略において、弱支配される戦略が使われる確率は0でなければならない。ところが、Nash 均衡点は、支配されるような戦略は用いられないが、弱支配される戦略に関しては、必ずしも用いられないとはいえない。そこで、"弱支配される戦略は正の確率で用い

ない″ということを、合理的なプレイヤーなら持っているであろう規範と考え、均衡点で各プレイヤーがこの規範を守っている状態を″弱支配合理性をもっている″として定義づけよう。

（定義）

G：標準形ゲーム

q^*：G の均衡点

q^* が弱支配合理性をもつ

$\Updownarrow$ def

各プレイヤー i の純粋戦略 π_i が、別の純粋戦略 π_i' によって弱支配されるならば $q^*(\pi_i) = 0$

（定義）

Γ：展開形ゲーム

b^*：Γ の均衡点

b^* が弱支配合理性をもつ

$\Updownarrow$ def

各プレイヤー i の局所純粋戦略 π_{iu} が、別の局所純粋戦略 π_{iu}' によって弱支配されるならば

$b_{iu}^*(\pi_i) = 0$

次に完全均衡点は、この弱支配合理性をもつことを示す。

(Lemma 1)

標準形ゲーム G において、混合戦略の組 $q^* = (q_1^*, \cdots, q_n^*)$ が完全均衡点ならば、q^* は弱支配合理性をもつ。

(証明)

q^* を極限均衡点としてもつ G の試験列 $\{\hat{G}^k\}$ が存在する。$\hat{G}^k$ の均衡点 $\hat{q}^k$ が q^* に収束するとする。

q^* が弱支配合理性をもたないと仮定して矛盾を導く。すなわち、ある $\pi_i', \pi_i'' \in \Pi_i$ において、

$$H_i(\pi/\pi_i') \geq H_i(\pi/\pi_i'') \quad \text{for every } \pi \in \Pi \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$H_i(\pi^0/\pi_i') > H_i(\pi^0/\pi_i'') \quad \exists\, \pi^0 \in \Pi \quad \cdots\cdots \text{②}$$

を満たし、かつ $q_i^*(\pi_i'') = \alpha > 0$ であると仮定する。

十分大きな k をとると

$$\eta^k_{\pi_i''} < \alpha$$

$$\eta^k_{\pi_i''} < \hat{q}_i^k(\pi_i'')$$

とできる。

このとき $\hat{G}^k$ におけるプレイヤー i の混合戦略 q_i' を次のように作る。

$$q_i'(\pi_i) \equiv \begin{cases} \eta^k_{\pi_i''} & (\pi_i = \pi_i'') \\ \hat{q}_i^k(\pi_i') + \hat{q}_i^k(\pi_i'') - \eta^k_{\pi_i''} & (\pi_i = \pi_i') \\ \hat{q}_i^k(\pi_i) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

このとき明らかに

$$q_i'(\pi_i'') < \hat{q}_i^k(\pi_i'')$$

$$q_i'(\pi_i') > \hat{q}_i^k(\pi_i')$$

①②より

$$\sum_{\pi_i \in \Pi_i} q_i'(\pi_i) H_i(\pi/\pi_i) \geq \sum_{\pi_i \in \Pi_i} \hat{q}_i^k(\pi_i) H_i(\pi/\pi_i) \quad \text{for every } \pi \in \Pi$$

$$\sum_{\pi_i \in \Pi_i} q_i'(\pi_i) H_i(\pi^0/\pi_i) > \sum_{\pi_i \in \Pi_i} \hat{q}_i^k(\pi_i) H_i(\pi^0/\pi_i) \quad \exists \pi^0 \in \Pi$$

$$\begin{aligned}
\therefore H_i(\hat{q}^k) &= \sum_{\pi} \hat{q}_1^k(\pi_1) \cdots \hat{q}_n^k(\pi_n) H_i(\pi) \\
&= \sum_{\pi_1} \cdots \sum_{\pi_{i-1}} \sum_{\pi_{i+1}} \cdots \sum_{\pi_n} \hat{q}_1^k(\pi_1) \cdots \hat{q}_{i-1}^k(\pi_{i-1}) \hat{q}_{i+1}^k(\pi_{i+1}) \cdots \hat{q}_n^k(\pi_n) \\
&\qquad \sum_{\pi_i} \hat{q}_i^k(\pi_i) H_i(\pi_1, \cdots, \pi_i, \cdots \pi_n) \\
&< \sum_{\pi_1} \cdots \sum_{\pi_{i-1}} \sum_{\pi_{i+1}} \cdots \sum_{\pi_n} \hat{q}_1^k(\pi_1) \cdots \hat{q}_{i-1}^k(\pi_{i-1}) \hat{q}_{i+1}^k(\pi_{i+1}) \cdots \hat{q}_n^k(\pi_n) \\
&\qquad \sum_{\pi_i} q_i'(\pi_i) H_i(\pi_1, \cdots, \pi_i, \cdots, \pi_n) \\
&= H_i(\hat{q}^k / q_i')
\end{aligned}$$

これは、$\hat{q}^{k}$が$\hat{G}^{k}$の均衡点であることに矛盾している。

よってq^*は、弱支配合理性をもつ。

（証明終わり）

標準形ゲームにおいて、弱支配合理性をもつNash均衡点をP_0均衡点と定義する。P_0均衡点は、Nash均衡点より強いが、Lemma 1より完全均衡点より弱いことがわかった。

《P_0均衡点で完全均衡点でない例》

$$
\text{player 1}\quad
\begin{array}{c}
 \\ L_1 \\ R_1
\end{array}
\begin{array}{c}
\text{player 2} \\
\begin{array}{cc} L_2 & R_2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0,0,0 & 0,0,0 \\ 0,0,1 & 1,1,1 \end{pmatrix} \\
L_3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
 \\ L_1 \\ L_2
\end{array}
\begin{array}{c}
 \\
\begin{array}{cc} L_2 & R_2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 3,2,2 & 3,2,2 \\ 4,4,0 & 1,1,1 \end{pmatrix} \\
R_3
\end{array}
$$

player 3

上の3人非協力標準形ゲームにおいて、(L_1, R_2, R_3)はNash均衡点であり、弱支配合理性をもつが、完全均衡点ではない。

（定理3.2）

完全記憶をもつ展開形ゲームΓにおいて、行動戦略の組$b^*=(b_1,\cdots,b_n)$が完全均衡点ならば、b^*は弱支配合理性をもつ。

（証明）

Γの代理標準形をGとする。b^*をG上に導入した混合戦略の組を$q^*=(q_1^*,\cdots,q_m^*)$とする。定理2.6によりq^*はGの完全均衡点である。Lemma 1によりq^*は弱支配合理性をもつ。

さてこのとき、Γの局所純粋戦略$\pi_{iu}',\pi_{iu}''\in\Pi_{iu}$に対して、$\pi_{iu}',\pi_{iu}''$に対応するGの混合戦略が$\varphi_j'$, φ_j''であるとすると、

$$\pi_{iu}'\ \mathrm{wdom}\ \pi_{iu}'' \Rightarrow H_i(\pi/\pi_{iu}')\geq H_i(\pi/\pi_{iu}'')\quad \text{for every } \pi\in\Pi$$
$$H_i(\pi/\pi_{iu}')>H_i(\pi/\pi_{iu}'')\quad \exists\,\pi\in\Pi$$
$$\Rightarrow E_j(\varphi/\varphi_j')\geq E_j(\varphi/\varphi_j'')\quad \text{for every } \varphi\in\Phi$$
$$E_j(\varphi/\varphi_j')>E_j(\varphi/\varphi_j'')\quad \exists\,\varphi\in\Phi$$
$$\Rightarrow q_j^*(\varphi_j'')=0\quad (\because\ q^*\text{の弱支配合理性より})$$
$$\Rightarrow b_{iu}^*(\pi_{iu}'')=0$$

$\therefore$ b^*は弱支配合理性をもつ　　（証明終り）

§2 P_1均衡点

2.1 P_1均衡点の定義

Nash均衡点は、必ずしも弱支配合理性をもたない。そこで、新しい均衡点を定義する。

(定義)

Γ : 完全記憶をもつ展開形ゲーム

b^* : Γの行動戦略の組

b^*がP_1均衡点である $\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ Γの任意の部分ゲームΓ'において、$b^*_{\Gamma'}$はNash均衡点で弱支配合理性をもつ

2.2 P_1均衡点の性質

P_1均衡点が、部分ゲーム完全であることは定義より明らかである。

(定理3.3)

Γ : 完全記憶をもつ展開形ゲーム

b^* : Γの行動戦略の組

b^*が完全均衡点ならば、b^*はP_1均衡点である

（証明）

b^*が完全均衡点ならば、定理2.4により、Γの任意の部分ゲームΓ'に対して、$b^*|_{\Gamma'}$はΓ'の完全均衡点である。また定理3.2により、$b^*|_{\Gamma'}$は弱支配合理性をもつ。よって、b^*はP_1均衡点である　（証明終わり）

完全記憶をもつ展開形ゲームΓにおいて、部分ゲーム完全均衡点の集合を$\mathcal{SP}$，完全均衡点の集合を$\mathcal{P}$，P_1均衡点の集合を$\mathcal{P}_1$としたとき、その関係は、

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{SP}$$

である。

（系）
完全記憶をもつ展開形ゲームには、少なくとも1つのP_1均衡点が存在する。

（証明）

定理2.8により完全均衡点は存在する。定理3.3により、完全均衡点はP_1均衡点であるからP_1均衡点も存在する。（証明終わり）

§3 P_2均衡点

P_1均衡点は、任意の部分ゲームにおいて、Nash均衡と弱支配合理性を満たすものであるが、これの変形として、任意のbrickにおいてNash均衡と弱支配合理性を満たすような均衡点を定義する。

3.1 truncation

truncationとbrickを定義するために、種々の準備が必要である。

Γ：展開形ゲーム

Γ'：Γの部分ゲーム

(Def) $\Gamma' \subset \Gamma \overset{def}{\iff} \Gamma'$は$\Gamma$の部分ゲームである

(Def) $\Gamma' \subsetneq \Gamma \overset{def}{\iff} \Gamma' \neq \Gamma$ かつ $\Gamma' \subset \Gamma$

(Def) Γ'がプロパーである $\overset{def}{\iff} \Gamma' \subsetneq \Gamma$ かつ Γ'は少なくとも1つの情報集合をもつ

(Def) Γが分解不可能 $\overset{def}{\iff} \Gamma$はプロパーな部分ゲームをもたない

M：Γの部分ゲームの集合

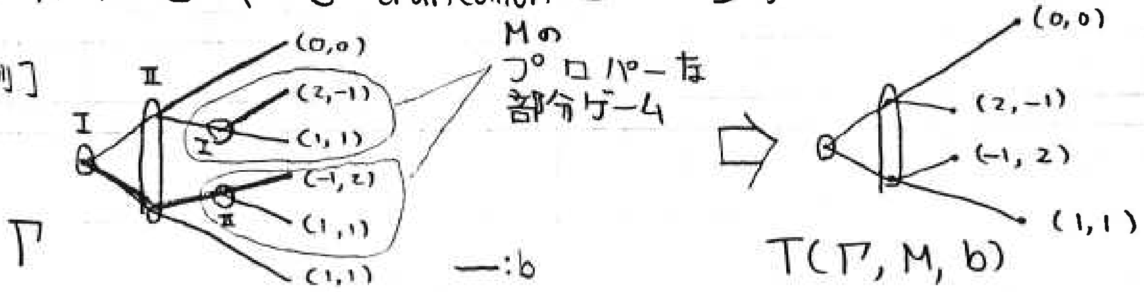
(Def) Mがマルチ部分ゲーム $\overset{def}{\iff} \forall \Gamma' \in M,\ \nexists \Gamma'' \in M$ s.t. $\Gamma' \subsetneq \Gamma''$

(Def) マルチ部分ゲームMがプロパー $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ Mの任意の要素はプロパーな部分ゲーム

部分ゲームΓ'は、いわばΓの部分集合のようなものである。そこでΓ'の補集合にあたるものとして考えられたのが次に定義するtruncationである。

$b=(b_1,\cdots,b_n)$をΓの行動戦略の組、MをΓのプロパーなマルチ部分ゲームとする。このとき次の方法で新しいゲームを作る。$\Gamma'\in M$の期待利得関数のベクトルをH'としたとき、ΓにおけるΓ'の部分を$H'(b|_{\Gamma'})$で置き換える。これを全てのMの要素について行なう。すなわち、各Γ'の始点を新しいゲームでは終点とし、その利得ベクトルとして$H'(b|_{\Gamma'})$を用いるということである。この新しいゲームを$T(\Gamma,M,b)$と表わし、b-truncationという。

[例]



Γの戦略の組bからΓの部分ゲームΓ'の戦略の組$b|_{\Gamma'}$が導入されるのと同じ方法で、$T(\Gamma, M, b)$上にも戦略の組を導入する。

$b = (b_1, \cdots, b_n)$：Γの行動戦略の組

$\bar{\Gamma} = T(\Gamma, M, b)$

$\bar{b} = (\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_n)$：$\bar{\Gamma}$の行動戦略の組

(Def) $\bar{b}_i$はb_iによって$\bar{\Gamma}$上に導入された $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\bar{b}_i$は$\bar{\Gamma}$の各情報集合に対して、b_iが与えていた確率分布と同じものを与える

(Def) $\bar{b}$はgによって$\bar{\Gamma}$上に導入された $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ 各$\bar{b}_i$はg_iによって$\bar{\Gamma}$上に導入された戦略である

このとき$\bar{b}_i$を$b_i|_{\bar{\Gamma}}$、$\bar{b}$を$b|_{\bar{\Gamma}}$とも表記する。

(Lemma 2)

Γ：展開形ゲーム

M：Γのプロパーマルチ部分ゲーム

b：Γの行動戦略の組

$\bar{\Gamma} = T(\Gamma, M, b)$

$\bar{H}$：$\bar{\Gamma}$の期待利得ベクトル

$$\overline{H}(b|_{\overline{\Gamma}}) = H(b)$$

（証明）　自明

（Lemma 3）

Γ：展開形ゲーム

M：Γ のプロパーマルチ部分ゲーム

b：Γ の行動戦略の組

$\overline{\Gamma} = T(\Gamma, M, b)$

b が Γ での部分ゲーム完全均衡点である $\Longrightarrow$ $b|_{\overline{\Gamma}}$ は $\overline{\Gamma}$ での部分ゲーム完全均衡点である

（証明）

$b|_{\overline{\Gamma}}$ が $\overline{\Gamma}$ の部分ゲーム完全均衡点でないと仮定する。このとき

$\exists \overline{\Gamma}' \subset \overline{\Gamma}$ s.t. $\exists j, \exists \overline{r}_j'$：$\overline{\Gamma}'$ におけるプレイヤー j の行動戦略；

$$\overline{H}_j'(b|_{\overline{\Gamma}'} / \overline{r}_j') > \overline{H}_j'(b|_{\overline{\Gamma}'})$$

ただし、$\overline{H}_j'$ は、$\overline{\Gamma}'$ におけるプレイヤー j の期待利得関数である。

さて、$M' \equiv \{\Gamma'' : \Gamma'' \in M, \Gamma'' \subsetneq \Gamma'\}$ とすると、$\overline{\Gamma}'$ は、Γ の部分ゲーム Γ' の $b|_{\Gamma'}$-truncation $T(\Gamma', M', b|_{\Gamma'})$

である。

このとき$\bar{\Gamma}'$におけるプレイヤーjの行動戦略r'_jを次のように作ってやる。

$$r'_{ju} \equiv \begin{cases} \bar{r}'_{ju} & (u\text{が}\bar{\Gamma}'\text{に属する情報集合}) \\ b'_{ju} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

すると、$\bar{H}'_j(b|\bar{\Gamma}'/\bar{r}'_j) > \bar{H}'_j(b|\bar{\Gamma}')$ とLemma Iより

$$H'_j(b|\Gamma'/r'_j) > H'_j(b|\Gamma')$$

となり、$b|\Gamma'$は、均衡点ではない。これはbが部分ゲーム完全均衡点であることに矛盾している。

（証明終わり）

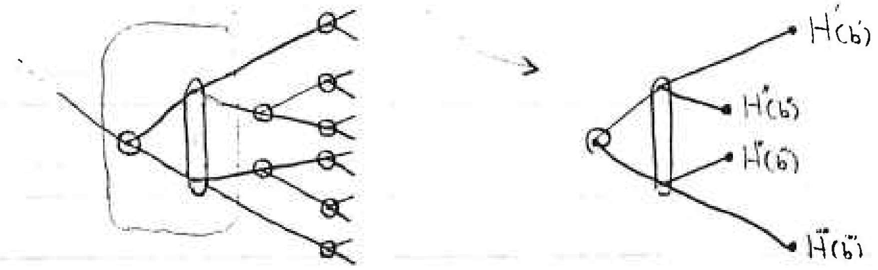
3.2 brick

truncationを用いてbrickを定義しよう。

（定義）

展開形ゲームΓにおいて、Γの行動戦略の組をbとしたとき、Γの分解不可能な部分ゲーム、あるいはΓのb-truncationの分解不可能な部分ゲームを**b-brick**という。

(例)

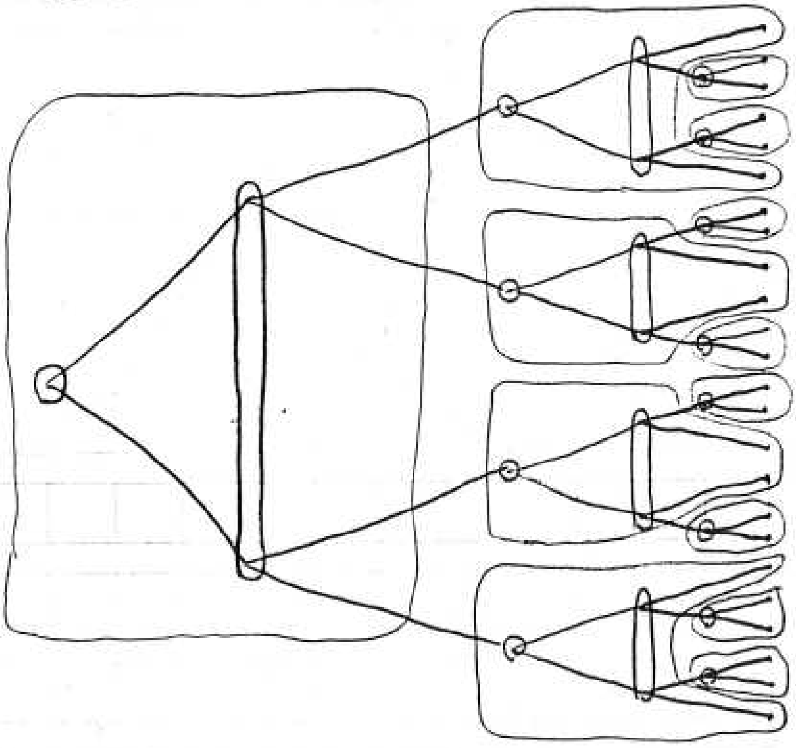


Γ　　　　b-brick

展開形ゲームΓから利得関数を取り除いたものを、利得なしゲームという。Γのb-brick Γ^bの利得なしゲームを、Γ^bの利得なしbrickという。

Γの利得なしゲームは、利得なしbrickによって一意に分割される。

Γの情報集合全体も利得なしbrickによって一意に分割される。つまり、各情報集合は、ただ1つの利得なしbrickに属する。



部分ゲームやtruncationに対してと同様に、b-brickに導入戦略を定義する。

$b=(b_1,\cdots,b_n)$：Γの行動戦略の組

Γ^b：Γの b-brick

$b^b=(b_1^b,\cdots,b_n^b)$：Γ^bの行動戦略の組

(Def) b_i^bはb_iによってΓ^b上に導入された戦略 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ b_i^bは、Γ^bの利得なしbrickに属するプレイヤーiの各情報集合において、b_iと同じ確率分布を与える

(Def) b^bはbによってΓ^b上に導入された戦略の組 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 各b_i^bは、b_iによってΓ^b上に導入された戦略である

b_i^bを$b_i|_{\Gamma^b}$，b^bを$b|_{\Gamma^b}$とも表記する。

次に、部分ゲーム完全均衡点b^*は、各b^*-brickにおいても均衡点であり、その逆も成り立つという定理を証明する。

(Def) Γ'がΓの**極大プロパー部分ゲーム** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Γ'はΓのプロパー部分ゲームで、Γ'をプロパー部分ゲームとするようなΓのプロパー部分ゲームは存在しない

すなわち、Γ'がΓの極大プロパー部分ゲームならば、$\Gamma' \subsetneq \Gamma'' \subsetneq \Gamma$となるような$\Gamma''$が存在しないということである。

展開形ゲームΓの**分解度**を帰納的に定義する。

(i) Γが分解不可能なとき、分解度は1

(ii) Γのすべての極大プロパー部分ゲームの分解度のうちで最も大きいものがmのとき、Γの分解度は$m+1$

Mを分解可能な展開形ゲームΓのすべての極大プロパー部分ゲームの集合とするとき、$\bar{\Gamma}=T(\Gamma, M, b)$を$\Gamma$の分解不可能なb-truncationといい、$T(\Gamma, b)$と記す。

（定理3.4）

Γ：展開形ゲーム

b^*：Γの行動戦略の組

b^*がΓの部分ゲーム完全均衡点である $\Longleftrightarrow$ Γの任意のb^*-brick Γ^bにおいて$b^*|\Gamma^b$は、Γ^bのNash均衡点である

（証明）

（⇒）は、部分ゲーム完全の定義とLemma 3より明らかである。

（⇐）分解度に関する帰納法で証明する。

Γの分解度が1のときは明らか。

分解度がmのゲームにおいて成り立つとする。今、Γの分解度がm+1のとき、Γの任意のプロパーな部分ゲームΓ'において、Γ'の分解度はm以下であるから、仮定より$b^*|_{\Gamma'}$はΓ'のNash均衡点となる。

このとき、b^*がΓの部分ゲーム完全均衡点でないと仮定して矛盾を導びこう。

b^*はNash均衡点でもない。なぜならば、Γの任意のプロパーな部分ゲームΓ'において、$b^*|_{\Gamma'}$はNash均衡点だから、b^*がΓのNash均衡であると部分ゲーム完全均衡点になってしまう。よって

$$\exists j \in N, \ \exists r_j \in B_j \ ;$$

$$H_j(b^*/r_j) > H_j(b^*) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

Γの分解不可能なb^*-truncation $\bar{\Gamma}=(\Gamma, b^*)$を考える。$\bar{\Gamma}$は$\Gamma$の$b^*$-brickでもある。$T(\Gamma, b^*/r_j)$の任意の終点のプレイヤー$j$の利得は$\bar{\Gamma}$における利得より大きいことはない。・・・・②

なぜならば、$T(\Gamma, b^*/r_j)$の終点がΓの終点でないならば、Γではその点のあとにΓの極大プロパー部分ゲームΓ'が続いていて、$b^*|_{\Gamma'}$はΓ'のNash均衡点となっているからである。

①と②より

$$\exists j \in N, \exists r_j \in B_j ;$$
$$\bar{H}_j(b^*|_{\bar{\Gamma}} / r_j|_{\bar{\Gamma}}) > \bar{H}_j(b^*|_{\bar{\Gamma}})$$

これは、Γのb^*-brick $\bar{\Gamma}$において$b^*|_{\bar{\Gamma}}$がNash均衡点ではないことを示している。・・・・矛盾。

∴分解度$m+1$のゲームにおいても($\Longleftarrow$)は成り立つ。

(証明終わり)

3.3 P_2均衡点

(a) P_2均衡点の定義

(定義)

Γ : 完全記憶をもつ展開形ゲーム

b^* : Γ の行動戦略の組

b^* が P_2均衡点である $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Γ の任意の b^*-brick Γ^b において、$b^*|\Gamma^b$ は Nash 均衡点で弱支配合理性をもつ

P_2均衡点全体の集合を $\mathcal{P}_2$ と表記する。

(b) P_2均衡点の性質

(Lemma 4)

Γ : 完全記憶をもつ展開形ゲーム

b^* : Γ の行動戦略の組

b^* が P_2均衡点である $\Longrightarrow$ b^* が部分ゲーム完全均衡点である

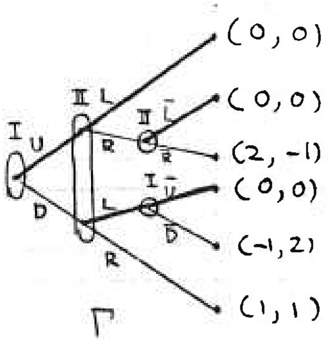
(証明) 定理3.4より明らかである。

(Lemma 5)

完全記憶をもつ展開形ゲームにおいて

$\mathcal{P}_2 \not\subset \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2 \not\supset \mathcal{P}_1$

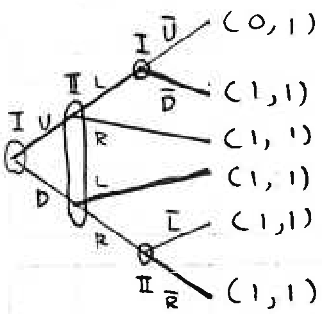
(例)



Γ

$b^* = (U\,\bar{U},\ L\,\bar{L})$ は P_1 均衡点であるが、P_2 均衡点でない

$\therefore P_1 \not\subset P_2$



$b^* = (U\,\bar{D},\ L\,\bar{R})$ は P_2 均衡点であるが、P_1 均衡点でない

$\therefore P_2 \not\subset P_1$

(Lemma 6)

完全記憶をもつ展開形ゲームΓにおいて、P_2 均衡点は、少なくとも1つ存在する。

(証明)

Γが与えられたとき、終点から帰納的に P_2 均衡点を作ってやることができる。

すべての終点がΓの終点となっているようなΓの brick Γ^b は少なくとも1つ存在する。Γ^b は、Γの行動戦略の組が与えられなくても定義できる。Γ^b には完全均衡点が存在する。Γ^b

の完全均衡点を$b^{\flat}$とする。このとき、$\Gamma^{\flat}$の各情報集合$u \in U_i$に関して$b^{*}_{iu} \equiv b^{\flat}_{iu}$を定義する。

ΓからΓ^{b}を除いて、Γ^{b}の始点を終点とし、$\Gamma^{\flat}$における$b^{\flat}$の期待利得をその終点の利得ベクトルとするようなΓのtruncationを考える。それは完全記憶をもつ展開形ゲームである。そして同様のことをくり返すと、有限回でΓのすべての情報集合に対してb^{*}_{iu}が定義できる。このb^{*}_{iu}をまとめたものを$b^{*}=(b^{*}_{1}, \cdots, b^{*}_{n})$とすると、$b^{*}$は$\Gamma$の行動戦略の組であり、$\Gamma$の$P_2$均衡点になっている。

（証明終わり）

（予想）

Γ：完全記憶をもつ展開形ゲーム

b^{*}：Γの行動戦略の組

b^{*}が完全均衡点である$\Longrightarrow$ b^{*}はP_2均衡点である

(c) P_2均衡点の長所・短所

長所

① 必ず存在する。(Lemma 6より)

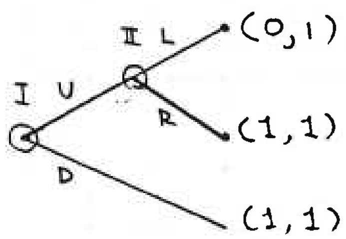
② P_2均衡点は、比較的簡単に求めることができる。

③ 弱支配合理性により、Nash均衡の不適当な点のいくつかを削除できる。

短所

① 必ずしも完全均衡点、P_1均衡点でないので、安定性、合理性に欠ける場合がある。

例



$b^*=(U,R)$はP_2均衡点であるが、プレイヤーIにとって戦略Uより戦略Dの方がよりよいことは明白である。

b^*は完全均衡点でも、P_1均衡点でもない。

(d) 長所②について

P_2均衡点は、Lemma 6の証明のような方法で計算することができる。この方法を逆さ帰納法(backward induction)という。特に、Γの各brickが単純な構造をしている場合は非常に有効である。

完全均衡点は、たいへんよい性質を持っているが、実際に完全均衡点を計算しようとすると、よっぽど単純な場合でない限り、非常に複雑でめんどうである。そこに、性質的にはやや劣るが計算が簡単なP_2均衡点の存在価値がある。

第4章　事前交渉の非協力モデル

この章では、Kalaiの事前交渉の非協力モデルを示す。P_2均衡点をその解として用いて、囚人のジレンマなどに適用する。

§1　事前交渉の位置づけ

Nash [1951]は、非協力ゲームは、ゲーム理論の基礎をなすものであり、協力ゲームは情報交換と交渉を非協力展開形ゲームの手番と考えることで非協力ゲームの枠内で考えることができ、またそうするべきだと主張している。すなわち、非協力の理論は、協力的状況も含め、広い範囲のゲーム的状況を扱うことが可能であるということである。

そこで、協力ゲームを非協力の立場から分析しようという試みが生まれる。この試みの課題は、協力ゲームにおける協力の交渉過程に対する適切な、説得力のある非協力モデルを作ることである。その試みの1つとして、Kalai [1981]が提案したのが、本論文で考察する事前交渉である。

§2 Kalaiの事前交渉モデル

この節ではKalai[1981]によって提案された事前交渉の非協力モデルについて考察する。

2.1 モデルの設定

(a) 交渉の対象となるゲーム

$N=\{1,2,\cdots,n\}$：プレイヤー集合

Π_i：プレイヤーiの有限な純粋戦略の集合

$\Pi \equiv \Pi_1 \times \cdots \times \Pi_n$

$H_i : \Pi \to R$　プレイヤーiのN-M効用利得関数

$H(\pi) \equiv (H_1(\pi),\cdots,H_n(\pi)) \qquad \pi \in \Pi$

これらによって構成されるn人非協力標準形ゲーム$G=(\Pi_1,\cdots,\Pi_n;H)$を本番のゲームとする。このGに対して事前交渉が行なわれると考える。

(b) 事前交渉の前提

Gの全プレイヤーが参加し、交渉の結果合意した行動は、Gに臨んで忠実に実行されなければならない。

(c) 事前交渉の手順

交渉は、n回のpreplayによって構成される。nは、あらかじめ決まった数である。

まず最初に、各プレイヤーiは、Π_iの中から戦略π_iを選択し提示する。これらの戦略の選択は、全プレイヤー同時に行なわれ、全員の選択が終わったあと、各プレイヤーが何を選択していたかが公開される。ここで決まった戦略の組$\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_n)$が、preplay nへの原戦略となる。便宜上π^nと記す。

preplay k ($k=1,\cdots,n$)は、すべて同一で次のように記述される。

まずpreplay kへの原戦略の組$\pi^k\in\Pi$が、すでに決まっていて公開されている。そのとき、全プレイヤーは新たに戦略を選択する。その結果を$\pi^{k-1}=(\pi_1^{k-1},\cdots,\pi_n^{k-1})$とする。もし$\pi^{k-1}=\pi^k$、すなわち全員が原戦略と同じ戦略を選択したならば、次のpreplay $k-1$への原戦略を$\pi^{k-1}\equiv\pi^k$と定め、preplay kは終了する。しかし何らかの変化があるときは、選択する戦略を変更したプレイヤ

一の集合を $C^1 \equiv \{ i \in N : \pi_i^{k,1} \neq \pi_i^k \}$ と定義でき、$C^1 \neq \phi$ である。そして $i \in C^1$ に対して、$\pi_i^{k-1} \equiv \pi_i^{k,1}$ と定める。つまり、戦略を変更したプレイヤーに関しては、その変更した戦略を preplay $k-1$ への原戦略とする。

変更しなかったプレイヤーは、再度新たに戦略 $\pi_i^{k,2}$ を選択する。このとき戦略を変更したプレイヤーの集合を $C^2 \equiv \{ i \in N - C^1 : \pi_i^{k,2} \neq \pi_i^{k,1} \}$ と定義できる。$C^2 = \phi$ ならば、$\pi_i^{k-1} \equiv \pi_i^k$ $(i \in N - C^1)$ と原戦略を定め preplay k を終了する。$C^2 \neq \phi$ ならば、$i \in C^2$ に対して、$\pi_i^{k-1} \equiv \pi_i^{k,2}$ と定め、残りのプレイヤー $N - C^1 - C^2$ に対して同じ操作をくり返す。

この操作は、高々 n 回で終了し、π^{k-1} が決定される。preplay $k-1$ への原戦略は、決定したものからその都度公開される。π^{k-1} を原戦略として preplay $k-1$ に突入する。

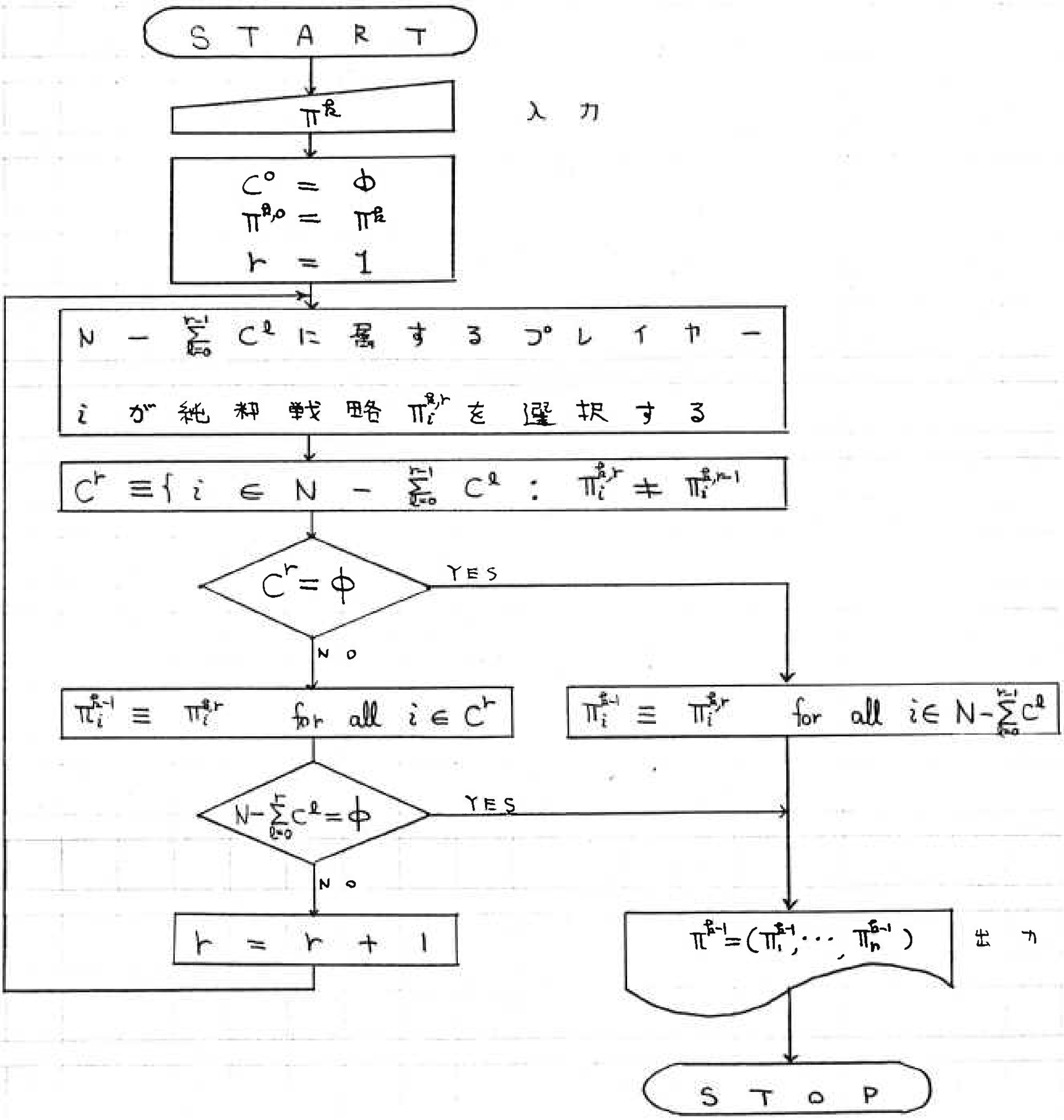
preplay 1 が終了すると $\pi^0 \in \Pi$ が決定される。これが最終的結果となり、事前交渉は終了する。本番のゲーム G において、π^0 は実行され

る。

《 preplay k の手順 》

入力 : $\pi^k = (\pi_1^k, \cdots, \pi_n^k)$ preplay k への原戦略の組

出力 : $\pi^{k-1} = (\pi_1^{k-1}, \cdots, \pi_n^{k-1})$ preplay $k-1$ への原戦略の組



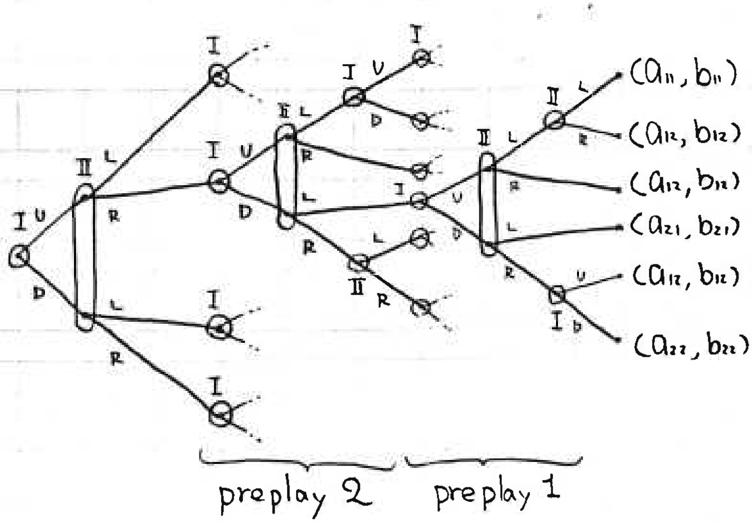
(d) 展開形ゲームによる表現

この事前交渉モデルは、非協力ゲームと考えることができ、完全記憶をもつ展開形ゲームとして表現することが可能である。このとき、各終点の利得ベクトルは、もしその点に対応する preplay 1 の出力 $\pi^0 \in \Pi$ を、G に対して実行したならば得られるであろう利得とする。また、プレイヤー i の任意の情報集合 u における選択の集合 C_u は、Π_i と一致する。

（例）

右の 2 × 2 双行列ゲームを G とすると、G の preplay 2 回の事前交渉モデルを展開形で表わすと、次のようになる。

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{player II} \\
\text{player I} &
\begin{array}{c|cc}
 & L & R \\
\hline
U & a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} \\
D & a_{21}, b_{21} & a_{22}, b_{22}
\end{array}
\end{array}
$$



このように、この事前交渉モデルは、展開形ゲームで表わすことができる。この展開形ゲームをGの事前交渉ゲームΓ_Gと名づける。

また、以後、事前交渉といったら、このKalaiの事前交渉モデルのことをさす。

(e) 現実的解釈

現実に絶対ありえないような交渉のモデルであるなら、まったく意味がないわけで、このモデルも何らかの現実的妥当性を持っているべきであろう。私は、少なくとも囚人のジレンマに適用した場合には、現実的妥当性をもつと考える。(§3の3.1参照)

2.2 事前交渉ゲームの均衡点

展開形ゲームの均衡点としては、完全均衡点が最も受容的とされている。しかし、事前交渉ゲームの均衡点としては、P_2均衡点を用いる。その理由は以下のとおりである。

(i) 事前交渉ゲームの各brickの構造は単純なので、完全均衡点に比べて、P_2均衡点は、はるかに計算しやすい。

(ii) 事前交渉において、プレイヤーが同時に戦略を提示しあう各段階が、Γ_Gのbrickに対応しているので、brickごとに弱支配合理性をもつNash均衡点を考えることは妥当である。

(iii) 囚人のジレンマに対する事前交渉ゲームのように、完全均衡利得とP_2均衡利得が一致する場合がある。

2.3 事前交渉モデルの特徴

(i) 事前交渉は、戦略についての交渉であり、別払いなどの要素は含んでいない。

(ii) 交渉のルールは簡単で、妥当性を持っている。

(iii) 交渉の過程にあいまいなところがなく、合意としての戦略の組は明確に定まる。

(iv) 仲裁者などの、第3者的要素が関与していない。

(v) 事前交渉に参加したために、かえって利得が減少してしまうというようなことはない。すなわち、各プレイヤーは最底限Gにおける Nash 均衡利得は確保できる。

§3 囚人のジレンマその他への適用

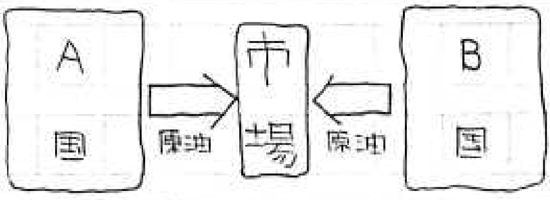
この節では、§2で定義した事前交渉モデルを、囚人のジレンマその他のゲームに適用して、その結果を考察する。

3.1 囚人のジレンマへの適用

(a) 具体的な例

この交渉モデルを最も適用しやすい例は、囚人のジレンマ型ゲームである。その理由は、Nash均衡点がPareto最適ではなく、全プレイヤーにとって、利得が高いような点が存在するために、協力の動機が存在するからである。

また、囚人のジレンマに適用した場合、その交渉過程に対して、非常に自然な解釈が可能である。その一例として、次のような状況を考える



原油を生産しているA国とB国を考える。両国は、同じ市場に原油を供給しているわけだが、生産過剰ぎみで原油の価格

が低下してしまった。両国は、生産調整を行ない、価格を引き上げようと思うわけだが、そこに囚人のジレンマ的状況が発生する。簡単のために、両国の戦略は、次の2つしかないとする。

L　：　生産調整を行なう

R　：　生産調整をやらない

両国が、(L, L)を選択すれば、価格は上昇し両国とも利益を得る。片方の国だけがLで、もう一方がRをとったとすると、価格は多少しか上昇せず、Lをとった国の生産量は減るので、その国は損をする。逆にRをとった国は、その分生産量が増加し、大きな利益を得る。この競争状態を双行列ゲームで表わすと次のようになる。

player 2 (B国)

$$
\begin{array}{ccc}
 & L & R \\
\text{player 1 (A国)} \quad L & & \\
R & &
\end{array}
\begin{pmatrix} 1,1 & -1,2 \\ 2,-1 & 0,0 \end{pmatrix}
$$

さて、このNash均衡点は（R,R）である。つまり、両国とも生産調整は行なわないことになる。このような場合、両国は、お互いに協力して、Pareto的に優っている（L,L）をとりたいと考えるであろう。そこで事前交渉にはいる。

このとき、preplay 1回の事前交渉モデルに、この状況にそった現実的解釈をほどこすと、次のようになる。

まずA国、B国が、自分の予定戦略を提示する。お互いに、その戦略を確認しあう。その際、もし自分の戦略を変更したくなった場合は、一回だけ変更できるが、相手は、その変更された戦略を見てから、自分の戦略を変える権利を得る。もし、両方が変更を申し込んだ場合は、その変更した戦略が最終的戦略として決定する。また、両方とも変更を申し込まなかった場合は、予定戦略が、最終的な合意として決定される。そこで事前交渉は終了する。

このような事前交渉では、A国B国などのように行動することが予想されるだろうか。両国とも、第1回目の戦略の提示では、相手が協力的な行動をとるだろうという楽観的な立場から、自分の予定戦略を選択するだろう。なぜならば、相手も協力することによってメリットがあるし、仮に、相手が非協力的な予定戦略を提示してきたところで、こちらも非協力的戦略に変更すれば、少なくとも事前交渉を行なわなかった場合のNash均衡利得は確保できるからである。両方の提示が協力的だったならば、双方とも戦略を変更することはないだろう。なぜならば、戦略を変更すると、相手もそれに対して戦略を変えることができるため、結局自分に不利になるからである。

よって事前交渉によって合意される戦略は(L,L)であろう。これは、後に示すように事前交渉ゲームのP_2均衡点になっている。

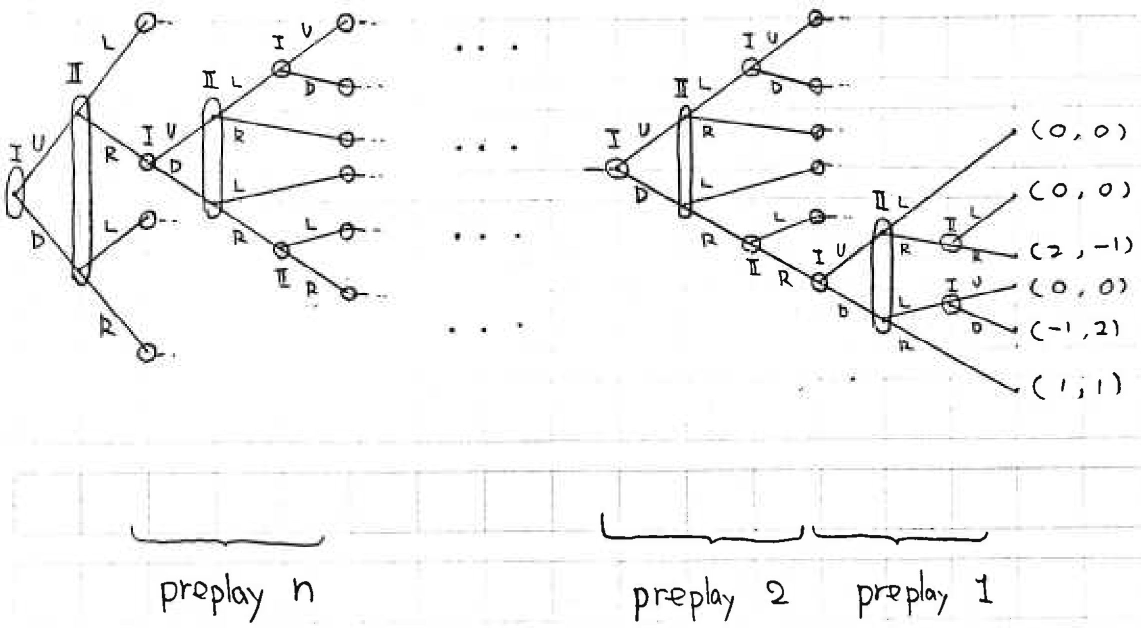
(b) 数値例

囚人のジレンマ型ゲームGに対する事前交渉ゲームΓ_Gを作り、そのP_2均衡点を求めてみよう。

$$G \quad : \quad \begin{array}{cc} & \text{player II} \\ & \begin{array}{cc} L & \quad R \end{array} \\ \text{player I} \begin{array}{c} U \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 2,-1 \\ -1,2 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

preplay n 回の事前交渉ゲームΓ_Gは、次のようになる。

Γ_G

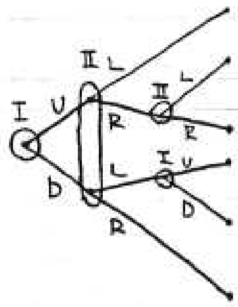


Γ_GのP_2均衡点を、backward induction で求める。すなわち、P_2均衡点b^*を各 preplay に導入した戦略を、preplay 1 から逆のぼって求めていく。

各 preplay には、原戦略によって、4つのタイプがある。

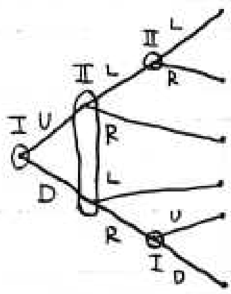
[ア]　原戦略

D R ⇒



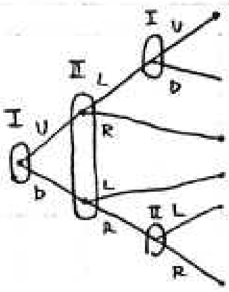
[イ]

D L ⇒



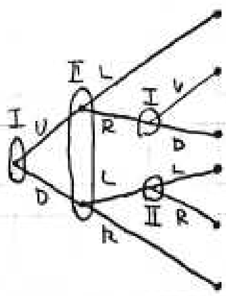
[ウ]

U R ⇒



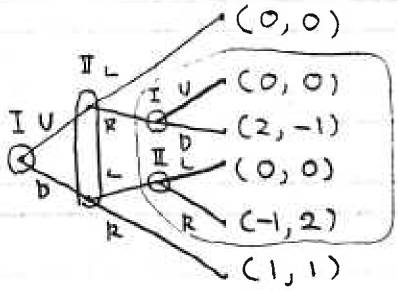
[エ]

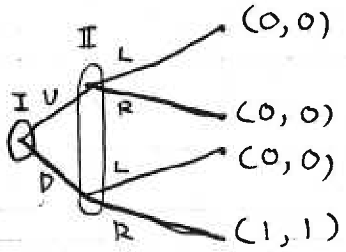
U L ⇒



preplay 1 に関しても、この4つのタイプを考えれば十分である。

[ア]のタイプ

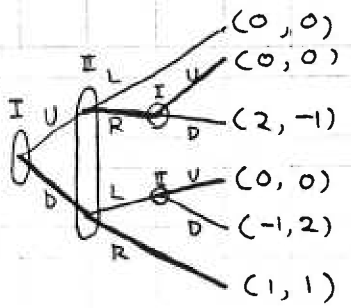




$$\begin{array}{ccc} & & \text{II} \\ & & \begin{array}{cc} \text{L} & \text{R} \end{array} \\ \text{I} & \begin{array}{c} \text{U} \\ \text{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,1^{*} \end{pmatrix} \end{array}$$

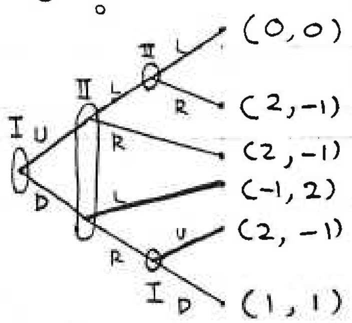
$\boxed{}$の部分は、brickになっている。このbrickの弱支配合理性をもつNash均衡点は、赤線で示した戦略になる。このとき、左のようなb^*-brickができる。このbrickの弱支配合理性をもつNash均衡点は、(D,R)ただ1つであることは自明である。

以上より、[ア]のタイプのpreplay 1におけるP_2均衡点は{(U,U),(R,L)}ただ1つで、期得利得は、(1,1)である。



同様に他の3つのタイプについてP2均衡点を求める。

[イ]

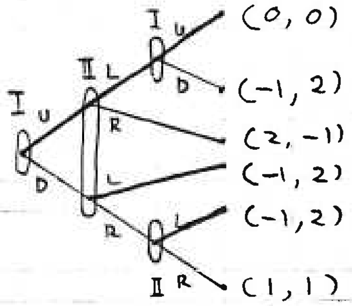


P2均衡点

{(U,U), (L,L)}

期待利得 (0,0)

[ウ]

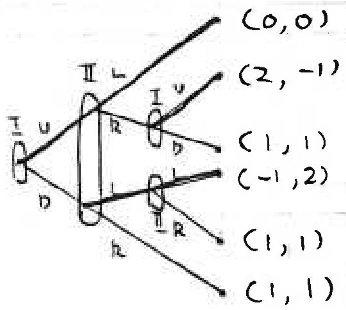


P2均衡点

{(U,U), (L,L)}

期待利得 (0,0)

[エ]



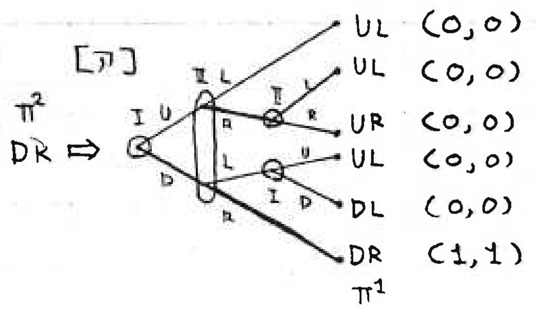
P2均衡点

{(U,U), (L,L)}

期待利得 (0,0)

preplay 1の各タイプについて、P2均衡点の期待利得は一意に定まる。よって、preplay 2のP2均衡点は次のように求まる。

[ア]



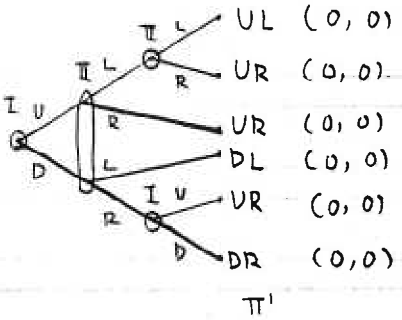
P2均衡点

{(D,*),(R,*)}　　* は任意

期待利得 (1,1)

[イ]

$\pi^2 = DL \Rightarrow$



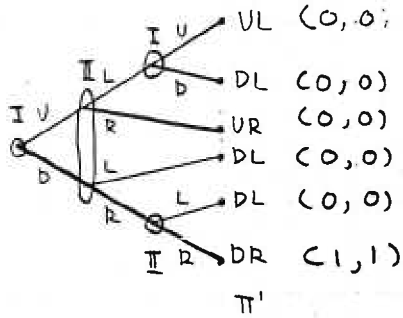
P₂ 均衡点

$\{(D, D), (R, *)\}$

期待利得 (1,1)

[ウ]

$\pi^2 = UR \Rightarrow$



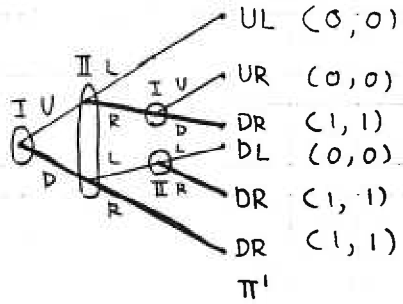
P₂ 均衡点

$\{(D, *), (R, R)\}$

期待利得 (1,1)

[エ]

$\pi^2 = UL \Rightarrow$



P₂ 均衡点

$\{(*, D), (R, R)\}$

期待利得 (1,1)

preplay 2 においては、P₂ 均衡点は一意でなくなる。しかし、どの P₂ 均衡点、どの π^2 についても $\pi^1 = (D, R)$ であり、期待利得は (1, 1) である。

preplan n (n > 2) においては、任意の戦略が、P₂ 均衡点になり、期待利得は (1, 1) である。

n > 2 のときは、π^n を決定する戦略も任意であるといえる。

以上のことをまとめると、

π^n を決定する brick を便義上 preplay 0 とおく。

○ preplay が2回以上のとき

P_2 均衡点 b^* は、

- preplay 0 において　$\{*, *\}$
- preplay k $(2<k\leq n)$ において　$\{(*,*),(*,*)\}$
- タイプ[ア]の preplay 2 において　$\{(D,*),(R,*)\}$
- タイプ[イ]の preplay 2 において　$\{(D,D),(R,*)\}$
- タイプ[ウ]の preplay 2 において　$\{(D,*),(R,R)\}$
- タイプ[エ]の preplay 2 において　$\{(*,D),(R,R)\}$
- タイプ[ア]の preplay 1 において　$\{(U,U),(R,L)\}$
- タイプ[イ][ウ][エ]の preplay 1 において　$\{(U,U),(L,L)\}$

b^* による期待利得は (1, 1)

すなわち、事前交渉の合意戦略は、(D, R)である。

・preplay が 1 回のとき

P_2 均衡点 b^* は、

・preplay 0 において {D, R}

・preplay 1 において

[ア] のタイプ {(U,U), (R, L)}

それ以外 {(U,U), (L, L)}

b^* による期待利得は (1, 1)

合意される戦略の組は (D, R)

囚人のジレンマ型ゲーム G においては、非協力のまま行なった場合の Nash 均衡利得 (0,0) を、preplay 1 回以上の事前交渉を導入することによって、Pareto 最適な利得 (1, 1) に改善することができた。

(c) 一般の囚人のジレンマゲーム

一般の囚人のジレンマ型の2×2双行列ゲームGは、次のように表わせる

$$
G: \quad \text{player I} \quad
\begin{array}{ccc}
 & \multicolumn{2}{c}{\text{player II}} \\
 & L & R \\
\begin{array}{c} U \\ D \end{array} &
\multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0,0 & a_1,b_1 \\ a_2,b_2 & a_3,b_3 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

ただし　$a_1 > a_3 > 0 > a_2$

$b_2 > b_3 > 0 > b_1$

(注) (U,L)の利得をゼロ正規化して(0,0)とおいても一般性は失われない。

GのNash均衡点は(U,L)で、利得(0,0)である。このような一般形でも、(b)の例と同様に、事前交渉を導入すれば、合意される戦略の組は(D,R)となり、利得はPareto最適な(a_3,b_3)と改善される。

(d) P_2均衡点と完全均衡点

囚人のジレンマGの事前交渉ゲームΓ_Gにおいては、P_2均衡点を用いても、完全均衡点を

用いても、利られる利得は同じである。さらにΓ_Gにおいては、明らかに

$$\rho \subset \rho_2$$

である。

3.2 その他のゲームへの適用

逢い引きのトラブル・弱虫ゲームなどに、事前交渉を用いた結果を示す。事前交渉ゲームΓ_Gの解としては、やはりP_2均衡点を用いるが、ここではP_2均衡点がどうなっているかは省略し、P_2均衡点によって得られる期待利得だけに注目する。なぜならば、重要なことは交渉の道すじよりも、交渉によって利得がいかに改善されたか、という点にあるからである。

(a) 逢い引きのトラブル

$$G:\ \text{player I}\ \begin{array}{c} \\ U \\ D \end{array} \overset{\text{player II}}{\begin{array}{cc} L & R \\ \left(\begin{array}{cc} 2,1 & -1,-1 \\ -1,-1 & 1,2 \end{array} \right) & \end{array}}$$

GのNash均衡点は

$$(U,L),\ (D,R),\ \left(\left(\tfrac{3}{5},\tfrac{2}{5}\right),\left(\tfrac{2}{5},\tfrac{3}{5}\right)\right)$$

期待利得は

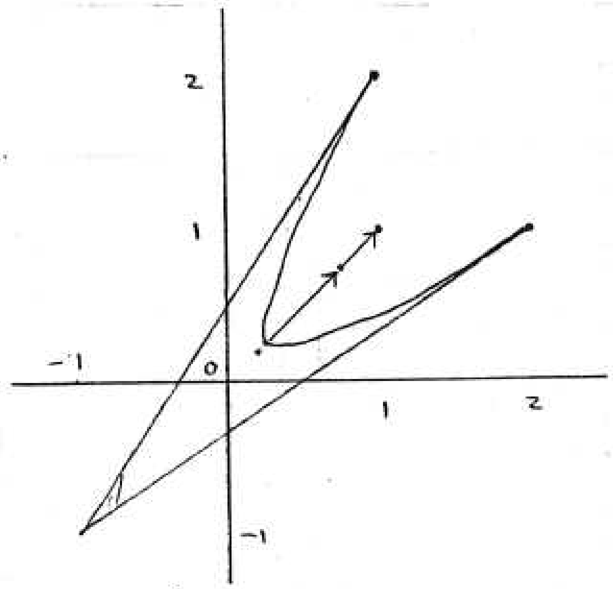
$$(2,1),\ (1,2),\ \left(\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{5}\right)$$

これらは完全均衡点でもある。

期待利得

事前交渉なし	(2, 1) (1, 2) ($\frac{4}{5}$, $\frac{4}{5}$)
事前交渉あり	
preplay 1回	(2, 1) (1, 2) ($\frac{49}{65}$, $\frac{49}{65}$)
2回	(2, 1) (1, 2) (1.0002, 1.0002)
n > 2	(2, 1) (1, 2) (1.0002, 1.0002)

（考案）



①事前交渉を導入することにより、Pareto最適な点はそのままで、Pareto最適でない点が改善される。

②Gにおいて、プレイヤーⅠ,Ⅱが、(U, L)、利得(2, 1)を均衡と考えるならば、彼らは、事前交渉を導入しても、(U, L)で合意するだろう。混合戦略の均衡 $((\frac{3}{5}, \frac{2}{5}), (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}))$ を好むならば、事前交渉においてもその傾向を保つと考えるのが自然である。そのプレイヤーにとっては、preplayが2回以上ならば、期

待利得は$\frac{4}{5}$から1.0002に改善される。従って、そのようなプレイヤーにとって、事前交渉は有効であるといえる。

③ $\left(\frac{49}{65}, \frac{49}{65}\right)$, (1.0002, 1.0002) は、いずれもGの非協力実現可能集合から外れている。これは、
"コインを投げて、(U, L) と (D, R) のいずれかを選ぶ"
といったような、"共同戦略"的要素を、この事前交渉モデルが潜在的に持っていることを暗示している。

(b) 弱虫ゲーム

$$G : \text{player I} \quad \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\text{player II}} \\ & L & R \\ \hline U & (4,4) & (0,6) \\ D & (6,0) & (-2,-2) \end{array}$$

GのNash均衡点は

$$(U, R), (D, L), \left(\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

期待利得は (0, 6), (6, 0), (2, 2)

期待利得

事前交渉なし	$(0,6)$	$(6,0)$	$(2,2)$
事前交渉あり			
preplay $n \geq 1$	$(0,6)$	$(6,0)$	$(2,2)$

（考察）　事前交渉による利得の改善はない。

(C)

$$G : \text{player I} \quad \begin{array}{c|cc} & \text{player II} & \\ & L & R \\ \hline U & 1,1 & 0,0 \\ D & 0,0 & 1,1 \end{array}$$

G の Nash 均衡点は

$$(U,L),(D,R),((\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}))$$

期待利得は $(1,1)$, $(1,1)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

期待利得

事前交渉なし	$(1,1),(1,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
事前交渉あり	
preplay 1回	$(1,1),(1,1),(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$
2回	$(1,1),(1,1),(\frac{7}{8},\frac{7}{8})$
n回	$(1,1),(1,1),(\frac{2^n-1}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n})$

（考案） nが十分大きい時、$(\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n})$は1に収束する。その時すべての期得利得はPareto最適になる。

3.3 まとめ

以上の例からわかった事前交渉の特徴は次のようなことである。

① パレート最適な均衡点は、事前交渉を導入してもそのままである。

② パレート最適でない均衡点は、事前交渉によって改善される場合と、変化しない場合がある。また改善されるとしてもパレート最適な点まで改善可能とは限らない。

③ 共同戦略を生みだす機能を内在している。

第5章　結　論

・この論文の主な結果

①一般に、協力ゲームと非協力ゲームは、別のフレームワークで論じられているが、ここでは、事前交渉のプロセスを展開形で表わすことによって、協力的結果を、非協力均衡点で達成することができた。

②弱支配合理性をもつNash均衡点として、P_2均衡点を定義した。これは、事前交渉ゲームの均衡点として考案されたものだが、一般性を持ち、計算上簡単であるという長所をもつ。

・今後の課題

①この論文では、事前交渉のある一つのモデルを考えたわけであるが、このモデルの一般化、あるいは別の事前交渉モデルの開発する。

②この論文の事前交渉モデルでは、協力戦略を生みだす機能、また情報交換の機能などはある程度表現された。これをさらによく表現

すること、また利得の譲渡や再配分に関しても、非協力展開形ゲームで表現できないかどうかについて考察する。最終的に協力ゲームを完全に非協力形へ還元し、種々の協力ゲームの解の概念（コア・安定集合・Value・他）と非協力均衡点を結びつける。

③ R均衡点について、より深い考察を行ない、応用を考える。

謝辞

最後になりましたが、この卒業研究を行なうにあたって適切なご指示をいただいた指導教官の鈴木光男先生、武藤滋夫先生、大学院の岡田章氏、船木由喜彦氏、杉山光正氏、加藤渉氏、上久保忠正氏、佐合正樹氏、鈴木信雄氏、金原一郎氏、および研究員宍戸栄徳先生に、深く感謝いたします。

参考文献

[1] Friedman, J. (1977) "Oligopoly and the Theory of Games", North Holland

[2] Kalai, E. (1981) "Preplay Negotiation and the PRISONER'S Dilemma", Mathematical Social Science 1 375-379

[3] Nash, J. F. (1951) "Noncooperative Games", Annals of Mathematics 54, 155-162

[4] Okada, A. "On Stability of Perfect Equilibrium Points", International Journal of Game Theory, forthcoming

[5] Selten, R. (1973) "A Simple Model of Imperfect Competition, Where 4 are Few and 6 are Many", International Journal of Game Theory 2, 141-201

[6] ―――― (1975) "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games", International Journal of Game Theory 4, 25-55

[7] 今井晴雄 (1981) "最近のゲーム論の展開と応用", 季刊現代経済学 WINTER

[8] 鈴木光男 (1981) "ゲーム理論入門", 共立全書 239