



I113 オートマトンと形式言語

レポート(4)と(5)の解説

TA 寺本 幸生



レポート(4) 問題1

CFG G を次のように定義する:
 $G = (\{P\}, \{(,)\}, P \rightarrow (P) \mid PP \mid \epsilon, P)$.

また、言語 L_B を次のように定義する:
 $L_B = \{ w \mid w \in \{(,)\}^*, w \text{ はバランスの取れたカッコの列} \}$.

問題1.1
 $L_B = L(G)$ を証明せよ。

ヒント: $L_B \subseteq L(G)$ と $L(G) \subseteq L_B$ を両方とも証明しなければならない点に注意せよ。

Report (4) Problem 1

Let G be a CFG defined by
 $G = (\{P\}, \{(,)\}, P \rightarrow (P) \mid PP \mid \epsilon, P)$.

Let L_B be a language defined by
 $L_B = \{ w \mid w \in \{(,)\}^*, w \text{ consists of balanced parentheses} \}$.

Problem 1.1:
Prove $L_B = L(G)$.

Hint: You have to prove both of $L_B \subseteq L(G)$ and $L(G) \subseteq L_B$.

レポート(4) 問題1.1 解答例

$L_B \subseteq L(G)$

任意の $w \in L_B$ について、 $w \in L(G)$ を示す。
• w の中のカッコのペアの個数を $|w|$ で表す。

- i) $|w| = 0$ のとき $P \rightarrow \epsilon$ より OK!
- ii) $|w| > 0$ のとき $|w'| < |w|$ を満たす任意の w' に対して $w' \in L(G)$ とする。

ここで、 w はバランスの取れたカッコ列なので $w = (w_1)w_2$ を満たす、 w_1 と w_2 が存在する。ここで、 $|w_1|, |w_2| < |w|$ 。

帰納法の仮定より、 $P \rightarrow w_1$ & $P \rightarrow w_2$

ここで、 $P \rightarrow PP \rightarrow (P)P$ であることから、
 $P \rightarrow PP \rightarrow (P)P \rightarrow (w_1)w_2 = w$ となる。 よって $w \in L(G)$ 。

$w = \epsilon \rightarrow |w| = 0$
 $w = () \rightarrow |w| = 1$

Report(4) Problem 1.1 [Answer]

$L_B \subseteq L(G)$

For any $w \in L_B$, we show $w \in L(G)$.
• Let $|\cdot|$ be the number of appropriate pairs of parentheses.

- i) If $|w| = 0$, then true from $P \rightarrow \epsilon$.
- ii) We let assume that
if $|w| > 0$, $w' \in L(G)$ for any words w' satisfying $|w'| < |w|$.

We note that w can be written as $w = (w_1)w_2$ where w_1 and w_2 are balanced one, since w is balanced. In fact, $|w_1|, |w_2| < |w|$.

By the induction hypothesis, $P \rightarrow w_1$ & $P \rightarrow w_2$

Applying rules as follows $P \rightarrow PP \rightarrow (P)P$,
we can say $P \rightarrow PP \rightarrow (P)P \rightarrow (w_1)w_2 = w$. Hence $w \in L(G)$.

$w = \epsilon \rightarrow |w| = 0$
 $w = () \rightarrow |w| = 1$

レポート(4) 問題1.1 解答例

$L(G) \subseteq L_B$

Gの文法では、いつでも (と) がペアで生成される。
しかも正しい順序で! (が左で) が右。

従って、バランスのとれたカッコ列しか生成しない。

$L(G) \subseteq L_B$

(証明終了)

Report(4) Problem1.1 [Answer]

$$L(G) \subseteq L_B$$

From rules of G , (and) are always generated as a pair with (is left and) is right!



Hence, G never generates unbalanced parentheses!



$$L(G) \subseteq L_B$$

q.e.d 😊

レポート(4) 問題1.2

問題1.2

G をもとにして、 $L(G_C) = L(G) - \{\epsilon\}$ を満たす Chomsky 標準形の CFG G_C を構成せよ。



Noam Chomsky

Chomsky の標準形

- すべての規則が、
1. $A \rightarrow BC$
 2. $A \rightarrow a$

基本戦略

1. ϵ をとりのぞく
2. 単位規則をとりのぞく
3. 無用な生成規則をとりのぞく

それから Chomsky 標準形になるように規則を修正する。

Report(4) Problem1.2

Problem 1.2

Construct the CFG G_C in Chomsky normal form with $L(G_C) = L(G) - \{\epsilon\}$ based on G .



Noam Chomsky

Chomsky normal form

Each rule is either of

1. $A \rightarrow BC$, or
2. $A \rightarrow a$

Elemental steps

1. Remove ϵ -productions.
2. Remove unit productions.
3. Remove useless symbols.

Then, refine the grammar with Chomsky normal form.

レポート(4) 問題1.2 解答例

G の生成規則

$$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \epsilon$$

1. ϵ をとりのぞく

$$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \epsilon \rightarrow P \rightarrow () \mid (P) \mid P \mid PP \quad \text{😊}$$

(P)より PPより

2. 単位規則をとりのぞく

$$P \rightarrow () \mid (P) \mid P \mid PP \rightarrow P \rightarrow () \mid (P) \mid PP$$

P→Pはそのままのぞける

3. 無用な生成規則をとりのぞく

3. は OK 😊

Report(4) Problem1.2 [answer]

The production rules in G

$$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \epsilon$$

1. Remove ϵ -productions

$$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \epsilon \rightarrow P \rightarrow () \mid (P) \mid P \mid PP \quad \text{😊}$$

by (P) by PP

2. Remove unit productions

$$P \rightarrow () \mid (P) \mid P \mid PP \rightarrow P \rightarrow () \mid (P) \mid PP$$

P→P can be removed easily.

3. Remove useless symbols

OK!! 😊

レポート(4) 問題1.2 解答例

G の生成規則

$$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \epsilon \rightarrow P \rightarrow () \mid (P) \mid PP$$

- ☆ 非終端記号の導入

$$P \rightarrow () \mid (P) \mid PP \xrightarrow{\begin{matrix} L \rightarrow (\\ R \rightarrow) \end{matrix}} P \rightarrow LR \mid LPR \mid PP$$

P→LPR がまだダメ。

$$\begin{matrix} P \rightarrow LR \mid LPR \mid PP & \xrightarrow{\begin{matrix} P \rightarrow LA \\ A \rightarrow PR \end{matrix}} & \begin{matrix} P \rightarrow LR \mid PP \\ L \rightarrow (\\ R \rightarrow) \end{matrix} & \text{OK} \end{matrix}$$

まとめると

$$G_C = ((P, L, R, A), \{(,), P \rightarrow LR \mid LA \mid PP, A \rightarrow PR, L \rightarrow (, R \rightarrow), P\}) \quad \text{😊}$$

Report(4) Problem1.2 [answer]

The production rules in G

$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \varepsilon \rightarrow P \rightarrow () \mid (P) \mid PP$

☆ Introducing non-terminal symbols

$P \rightarrow () \mid (P) \mid PP \xrightarrow{L \rightarrow (, R \rightarrow)}$ $P \rightarrow LR \mid LPR \mid PP$
 $P \rightarrow LPR$ is bad!

$P \rightarrow LR \mid LPR \mid PP \xrightarrow{P \rightarrow LA, A \rightarrow PR}$ $P \rightarrow LR \mid PP$
 $L \rightarrow (, R \rightarrow)$ OK

Summing up,

$G_C = (\{P, L, R, A\}, \{(,)\}, P \rightarrow LR \mid LA \mid PP, A \rightarrow PR, L \rightarrow (, R \rightarrow), P)$ 😊

レポート(5) 問題1

$\Sigma = \{0, 1\}$ 上の言語 L を次のように定義する:

$$L = \{0^n 1^m \mid n > m > 1\}.$$



L を受理する TM M を以下の手順で構成せよ。

1. 文法チェック用 TM M_1 の設計 (「 $w = 00^*11^*$ 」かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計

構成手順を鑑みて $L = \{0^n 1^m \mid n > m \geq 0\}$ でも良いこととする。

Report(5) Problem1

Let L be the language over $\Sigma = \{0, 1\}$ defined by

$$L = \{0^n 1^m \mid n > m > 1\}.$$



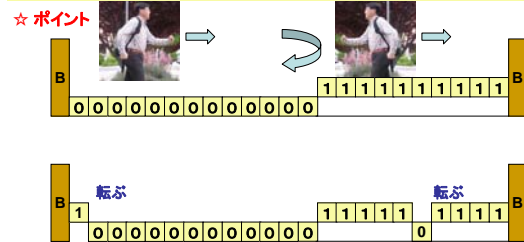
Construct a TM M that accepts L as follows.

1. Design TM M_1 for checking whether 「 $w = 00^*11^*$ 」.
2. For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.
3. From TMs M_1 and M_2 , construct M.

Considering problem 1.1, we may be allowed to answer in which $L = \{0^n 1^m \mid n > m \geq 0\}$.

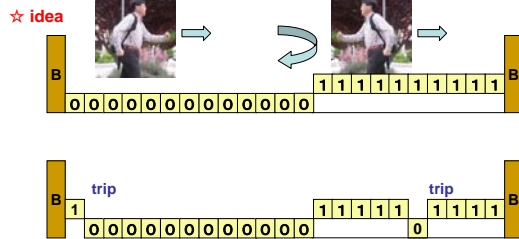
レポート(5) 問題1.1 解答例

1. 文法チェック用 TM M_1 の設計 (「 $w = 00^*11^*$ 」かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計



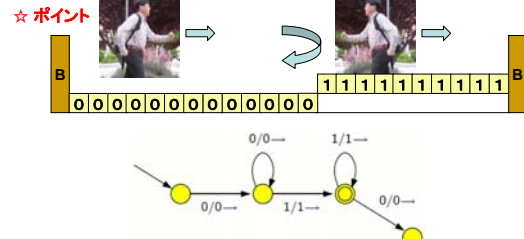
Report(5) Problem1.1 [answer]

1. Design TM M_1 for checking whether 「 $w = 00^*11^*$ 」.
2. For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.
3. From TMs M_1 and M_2 , construct M.



レポート(5) 問題1.1 解答例

1. 文法チェック用 TM M_1 の設計 (「 $w = 00^*11^*$ 」かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計

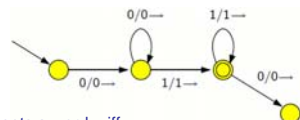
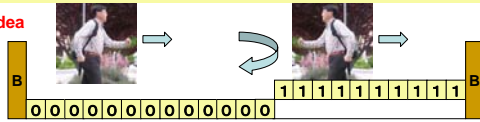


TM が停止したときに受理状態にあれば良いとする。😊

Report(5) Problem1.1 [answer]

1. Design TM M_1 for checking whether $\Gamma w = 00^*11^* \text{J}$.
2. For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.
3. From TMs M_1 and M_2 , construct M .

★ idea

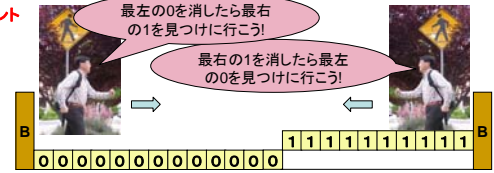


M_1 accepts a word iff M_1 's state is in accepted ones, when M_1 terminates. 😊

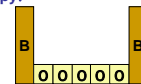
レポート(5) 問題1.2 解答例

1. 文法チェック用TM M_1 の設計 ($\Gamma w = 00^*11^* \text{J}$ かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計

★ ポイント



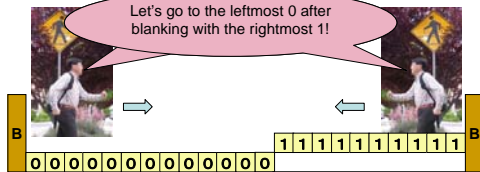
最終的に次のようになったらHappy!



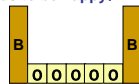
Report(5) Problem1.2

1. Design TM M_1 for checking whether $\Gamma w = 00^*11^* \text{J}$.
2. For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.
3. From TMs M_1 and M_2 , construct M .

★ idea

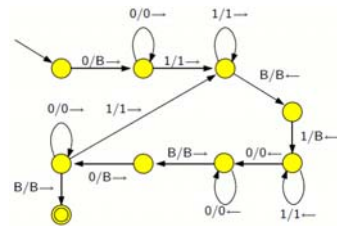


Finally, following case will leads to be happy!



レポート(5) 問題1.2 解答例

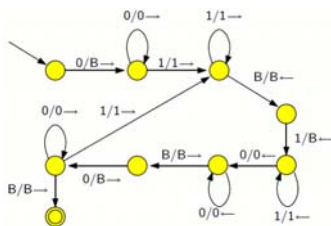
1. 文法チェック用TM M_1 の設計 ($\Gamma w = 00^*11^* \text{J}$ かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計



😊

Report(5) Problem1.2 [answer]

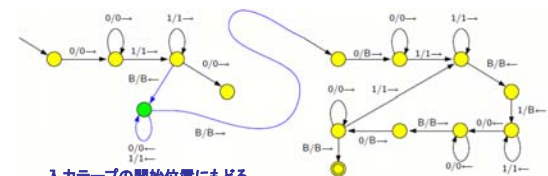
1. Design TM M_1 for checking whether $\Gamma w = 00^*11^* \text{J}$.
2. For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.
3. From TMs M_1 and M_2 , construct M .



😊

レポート(5) 問題1.3 解答例

1. 文法チェック用TM M_1 の設計 ($\Gamma w = 00^*11^* \text{J}$ かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計



入力テープの開始位置にもどる

😊

Report(5) Problem1.2 [answer]

- 1. Design TM M_1 for checking whether $\Gamma w = 00^*11^* J$.
- 2. For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.
- 3. From TMs M_1 and M_2 , construct M .

