

8. Turing 機械入門(1)

- 8.1. コンピュータで解けない問題
- 8.2. チューリング機械
- 8.3. チューリング機械のプログラム技法
- 8.4. 基本チューリング機械の拡張
- 8.5. 制限されたチューリング機械
- 8.6. チューリング機械とコンピュータ

1/32

8. Turing Machine (1)

- 8.1. Unsolvble Problems for Computer
- 8.2. Turing machine
- 8.3. Programming Techniques for TM
- 8.4. Extension of basic TM
- 8.5. Restricted TM
- 8.6. Turing machine and real computer

2/32

8.2. Turing 機械とは

すべての命題は証明できるのか? **No!**

すべての関数は計算できるのか? **No!**

8.2.1. チューリング機械モデル

「証明」とは何か? 「計算」とは何か? 193?~

- クリーネの帰納的関数
- チューリングの Turing Machine モデル
- (Gödelの不完全性定理) ...計算の理論

帰納的関数=TMで計算できる関数

Church の提唱: **計算可能な関数** ↕ (例外) DNAコンピュータ 量子コンピュータ

8.2. Turing Machine

Every proposition can be proved? **No!**

Every function can be computed? **No!**

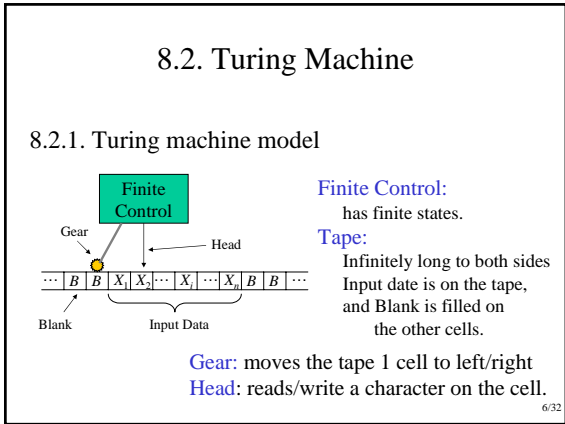
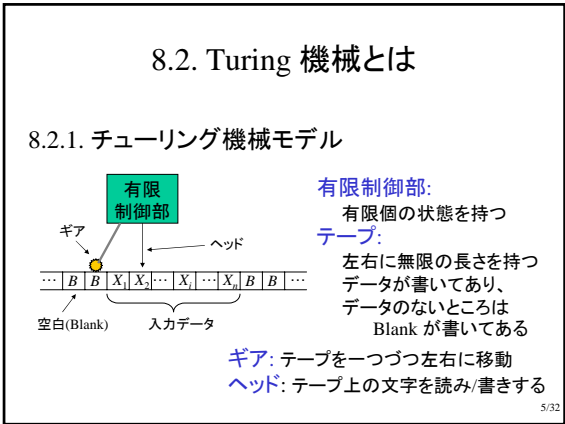
8.2.1. Turing machine model

What is 'a proof'? What is 'a computation'? 193?~

- Kleene: 'recursive function'
- Turing: Turing machine model
- (Gödel: Incompleteness theorems) ...Computational Complexity

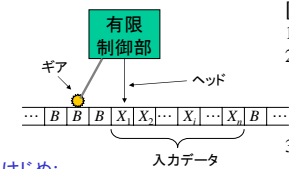
Recursive function = Function computable by TM

Church's Thesis: **Computable function** ↕ (Exceptions) DNA Computer, Quantum Computer



8.2. Turing 機械とは

8.2.1. チューリング機械モデル



はじめ:

- 有限制御部は初期状態
- テープには入力がかかれている
- ヘッドは X_1 (入力の1文字目)の上にある

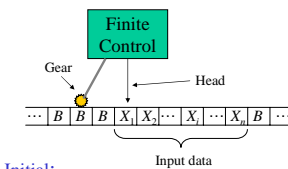
7/32

[動作プロセス]

1. ヘッド部の文字 X を読む
2. 状態 q と文字 X に応じて
 1. 状態を変更
 2. X を書き換える
 3. ヘッドを右/左に1移動
3. “受理状態”なら停止、さもなければ1へ

8.2. Turing Machine

8.2.1. Turing machine model



Initial:

- Finite control is initial state
- Input word is on the tape
- Head is on X_1 , the first letter of input.

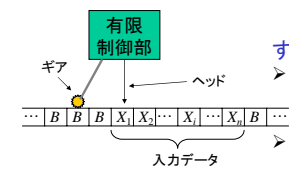
8/32

[Computation Process]

1. Read the letter X on the tape
2. According to the state q and letter X ,
 1. change the state
 2. replace X
 3. move the head 1 cell to left or right
3. Halt if “accepting state” or go to step 1.

8.2. Turing 機械とは

8.2.1. チューリング機械モデル



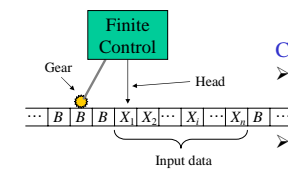
すでに学んだモデルとの関連

- オートマトン:
 - 入力を読むだけ
 - ヘッドを右に動かすだけ
- PDA:
 - オートマトン+
 - 入力データの書かれていない部分にスタックを作る

9/32

8.2. Turing Machine

8.2.1. Turing machine model



Comparing to...

- Automaton:
 - Input data is just read.
 - Head only moves to right.
- PDA:
 - Automaton+
 - We can make a stack on the left side.

10/32

8.2. Turing 機械とは

8.2.2. チューリング機械の記法

Turing Machine (TM) は以下の7つ組で表現:

- $$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$
- Q : 状態の集合
 - Σ : 入力アルファベット
 - Γ : テープ上の文字を表現するアルファベット (よって $\Sigma \subset \Gamma$)
 - δ : 遷移関数 (後述)
 - q_0 : 初期状態 (よって $q_0 \in Q$)
 - B : 空白記号。 $B \in (\Gamma - \Sigma)$ 。テープ上の有限個のマスの以外は全部 B で埋められている、と仮定する。
 - F : 受理状態 (よって $F \subseteq Q$)

11/32

8.2. Turing Machine

8.2.2. Notations for a TM

Turing Machine (TM) is defined by a 7-tuple:

- $$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$
- Q : set of states
 - Σ : input alphabets
 - Γ : alphabets on the tape (hence $\Sigma \subset \Gamma$)
 - δ : transition function (described later)
 - q_0 : initial state (hence $q_0 \in Q$)
 - B : Blank. $B \in (\Gamma - \Sigma)$. We assume that all cells on the tape are filled by B except finite cells.
 - F : accepting state (hence $F \subseteq Q$)

12/32

8.2. Turing 機械とは

有限制御部

8.2.2. チューリング機械の記法

Turing Machine (TM) の遷移関数 δ :

入力: $Q \times \Gamma$ ← ヘッドが読んでいる文字 X

現在の状態 p ヘッドを移動する方向(Left,Right)

出力: $Q \times \Gamma \times \{L,R\}$ $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L,R\}$

次の状態 q X を書き換える文字 Y

決定性: δ の値はいつでも1つ

非決定性: δ の値が複数ありえる

$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{L,R\}}$

13/32

8.2. Turing Machine

Finite Control

8.2.2. Notations for a TM

Transition function δ of a Turing Machine (TM):

Input: $Q \times \Gamma$ ← Letter X read by the head

current state p Direction to move the head (Left,Right)

Output: $Q \times \Gamma \times \{L,R\}$ $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L,R\}$

Next state q X is replaced by Y

Deterministic: δ is always determined uniquely

Nondeterministic: δ can have several values

$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{L,R\}}$

14/32

8.2. Turing 機械とは

有限制御部

8.2.3. チューリング機械の時点表示(様相)

TM の様相は以下の情報が含まれていれればよい:

- 状態
- テープの内容
- ヘッドの位置

状態、入力、計算時間は有限なので、テープの内容も有限

TM M の様相: $X_1X_2 \dots X_{i-1}qX_iX_{i+1} \dots X_n$

有限制御部

15/32

8.2. Turing Machine

Finite Control

8.2.3. Instantaneous Description (ID) of a TM

The ID of a TM needs the following information:

- state
- content of the tape
- position of the head

The contents of a tape is finite since states, input, and computation time are finite.

ID of a TM M : $X_1X_2 \dots X_{i-1}qX_iX_{i+1} \dots X_n$

Finite Control

16/32

8.2. Turing 機械とは

有限制御部

8.2.3. チューリング機械の時点表示(様相)

TM M の様相: $X_1X_2 \dots X_{i-1}qX_iX_{i+1} \dots X_n$

- 必要なら B を書く

$qBX_1 \dots X_n$

TM M の計算(遷移)の1ステップを \vdash で、0ステップ以上の遷移を \vdash^* で表現するのは PDA と同様。

TM の遷移図

文字が a なら b で置換して右に移動

17/32

8.2. Turing Machine

Finite Control

8.2.3. Instantaneous Description (ID) of a TM

ID of a TM M : $X_1X_2 \dots X_{i-1}qX_iX_{i+1} \dots X_n$

- Write B if it is necessary

$qBX_1 \dots X_n$

Transitions (computations) of a TM M : 1 step is described by \vdash , 0 or more steps are described by \vdash^* , as PDA.

Diagram for TM

Move the head to right after replacing letter a by b .

18/32

8.2. Turing 機械とは

8.2.3. チューリング機械の時点表示(様相)

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$

アイデア: 両端が同じ文字なら B で置換していき、全部 B になったら受理

1. 最初の文字が B なら受理
2. 最初の文字が $0/1$ なら、
 - ① その文字を「状態」で覚える
 - ② その文字を B で上書き
 - ③ 右端へ移動
 - ④ 同じ文字なら B で上書き
 - ⑤ 左端へ戻る
 - ⑥ ステップ1へ戻る

19/32

8.2. Turing Machine

8.2.3. Instantaneous Description (ID) of a TM

Ex) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$

Idea: If leftmost and rightmost letters are the same, replace them by B . Accept if all letters become B .

1. Accept if the first letter is B
 - ① store the letter by the state
 - ② replace the letter by B
 - ③ move to the leftmost
 - ④ replace the leftmost letter by B if it is the same
 - ⑤ move to the rightmost
 - ⑥ go to step 1.

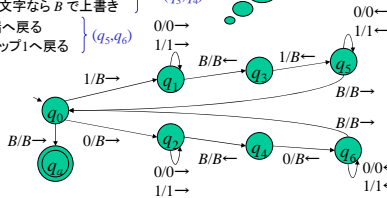
20/32

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$

アイデア: 両端が同じ文字なら B で置換していき、全部 B になったら受理

1. 最初の文字が B なら受理 (q_0, q_a)
2. 最初の文字が $0/1$ なら、
 - ① その文字を「状態」で覚える (q_1, q_2)
 - ② その文字を B で上書き (q_3, q_4)
 - ③ 右端へ移動 (q_5, q_6)
 - ④ 同じ文字なら B で上書き
 - ⑤ 左端へ戻る
 - ⑥ ステップ1へ戻る

TMの動作の正当性は入力長に関する帰納法



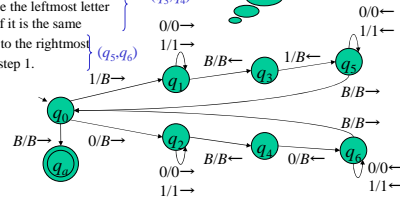
21/32

Ex) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$

Idea: If leftmost and rightmost letters are the same, replace them by B . Accept if all letters become B .

1. Accept if the first letter is B (q_0, q_a)
 - ① store the letter by the state (q_1, q_2)
 - ② replace the letter by B (q_3, q_4)
 - ③ move to the leftmost (q_5, q_6)
 - ④ replace the leftmost letter by B if it is the same
 - ⑤ move to the rightmost
 - ⑥ go to step 1.

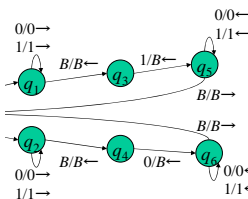
Correctness of the TM is proved by induction for the length of the input.



22/32

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する TM $M = (\{q_a, q_0, q_1, \dots, q_6\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_0, B, \{q_a\})$ の形式的定義: δ は以下の通り

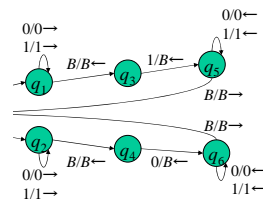
	0	1	B
q_0	(q_2, B, R)	(q_1, B, R)	(q_a, B, R)
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	(q_3, B, L)
q_2	$(q_2, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	(q_4, B, L)
q_3	-	(q_5, B, L)	-
q_4	(q_6, B, L)	-	-
q_5	$(q_5, 0, L)$	$(q_5, 1, L)$	(q_0, B, R)
q_6	$(q_6, 0, L)$	$(q_6, 1, L)$	(q_0, B, R)
q_a	-	-	-



23/32

Ex) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ is accepted by TM $M = (\{q_a, q_0, q_1, \dots, q_6\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_0, B, \{q_a\})$, where δ is defined as follows:

	0	1	B
q_0	(q_2, B, R)	(q_1, B, R)	(q_a, B, R)
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	(q_3, B, L)
q_2	$(q_2, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	(q_4, B, L)
q_3	-	(q_5, B, L)	-
q_4	(q_6, B, L)	-	-
q_5	$(q_5, 0, L)$	$(q_5, 1, L)$	(q_0, B, R)
q_6	$(q_6, 0, L)$	$(q_6, 1, L)$	(q_0, B, R)
q_a	-	-	-



24/32

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する TM M が入力 1001 を受理する計算は以下の通り:

$q_01001 \vdash q_1001 \vdash 0q_101 \vdash 00q_11 \vdash 001q_1 \vdash 00q_31$
 $\vdash 0q_50 \vdash q_500 \vdash q_5B00 \vdash q_000 \vdash q_20$
 $\vdash 0q_2 \vdash q_40 \vdash q_6 \vdash q_0 \vdash q_a$

Ex) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ is accepted by TM M .
 The computation of M for the input 1001 is:

$q_01001 \vdash q_1001 \vdash 0q_101 \vdash 00q_11 \vdash 001q_1 \vdash 00q_31$
 $\vdash 0q_50 \vdash q_500 \vdash q_5B00 \vdash q_000 \vdash q_20$
 $\vdash 0q_2 \vdash q_40 \vdash q_6 \vdash q_0 \vdash q_a$

8.2. Turing 機械とは

8.2.5. チューリング機械の受理言語

TM M によって受理される言語 $L(M)$:

M を入力 w の元で動作させたとき、受理状態になる

↓ 形式的には...

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ に対して、
 $L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{ある } p \in F \text{ が存在し、} \\ q_0 w \vdash^* \alpha p \beta \ (\alpha, \beta \in \Gamma^*) \text{ となる。} \}$

★ M の停止性は問題にしていない

- とにかく途中で受理状態になれば受理する
- $L(M)$ に入らない語は、受理状態にならなければよい。デッドロックでも無限ループでもよい。端的には停止しなくても良い。

8.2. Turing Machine

8.2.5. Language accepted by a TM

The language $L(M)$ accepted by a TM M :

M will be in an accepting state under input w

↓ Formally...

For $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$,
 $L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F, q_0 w \vdash^* \alpha p \beta \ (\alpha, \beta \in \Gamma^*) \}$

★ We do not mind if M halts or not.

- Anyway, it accepts if it is in an accepting state.
- For a word not in $L(M)$, we only say that M never accepts. It is OK if it is in dead-lock or infinite-loop. Namely, it is OK if it does not stop.

8.2. Turing 機械とは

8.2.6. チューリング機械の停止性

[定義] TM M において $\delta(q, X)$ が未定義のとき、 M は動作を停止すると定義する。

★ $L(M)$ の定義で、受理状態では TM は動作を停止するとしても定義される言語は変わらない。

★ $L(M)$ に属さない語 w の振る舞いはわからないことに注意する。(停止 or 無限ループ)

帰納的可算言語: 上記の定義に基づく TM で

U 受理できる言語

帰納的言語: $L(M)$ に属さない語 w に対しても TM M が動作を停止する、という制限を加えた言語

$w \in L$ と $w \notin L$ が非対称

8.2. Turing Machine

8.2.6. Halting property of TM

[Definition] For a TM M , if $\delta(q, X)$ is not defined, we define that M halts (namely, it stops computing).

★ In the definition of $L(M)$, the language does not change if we define "TM halts in an accepting state".

★ We do not mind for the word w not in $L(M)$. (Halt or infinite-loop)

Recursively enumerable language:

U The set of languages accepted by above TMs

Recursive language: The set of languages accepted by TMs that always halt (especially, the words not in $L(M)$).

$w \in L$ and $w \notin L$ are not symmetric.

8. Turing 機械入門(1)

8.*. チューリング機械の意義

- 「計算」の数学的モデルとして
 - 「計算できる関数」が扱えるようになった
- 「計算する機械」のモデルとして
 - TMは万能性を持っている
通常のフォン・ノイマン型計算機で計算できる関数は、すべてTMで計算できる。
 - 計算の効率を測るための尺度に使える
アルゴリズムの効率はTMでの時間量、領域量が計測のベースになっている。

31/32

8. Turing Machine

8.*. Meaning of a Turing machine

- Mathematical model of a 'computation'
 - Computable function can be considered.
- Model for a 'computer'
 - TM has universality.
Every function computable by any von-Neuman type computer can be computed by a universal Turing machine.
 - TM can be used as a measure for efficiency of a computation.
The efficiency of an algorithm is evaluated by the time complexity and space complexity of a TM.

32/32