

9. 決定不能性

計算機では決定できない問題がある。

例) 与えられたプログラムは

- 無限ループに陥ってしまっても停止しない
- 有限の時間内で停止する

Yes/Noで答える

のどちらかであるが、一般には決定できない。

よ〜く見れば、
人間ならわかる!?

No!!

9. Unsolvability

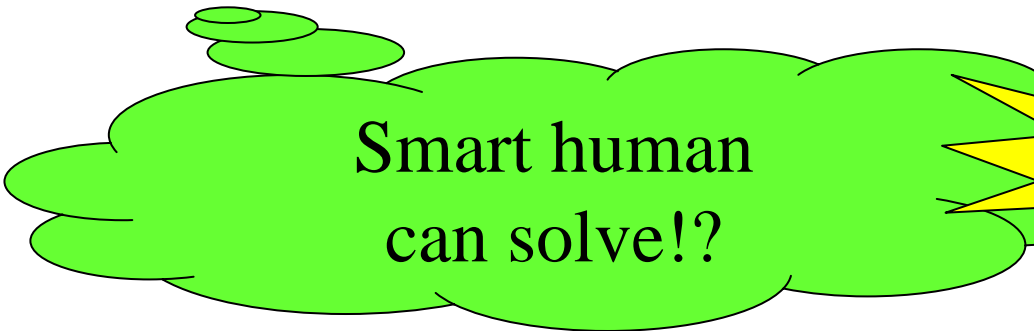
There exist problems that are not solvable by a computer.

Ex) Any given program either

- does not halt forever, or
- halts in finite time.

Yes/No question

However, it cannot be solvable in general.



Smart human
can solve!?



No!!

9. 決定不能性

決定不能な問題の例)

[停止性判定問題]

入力: コンピュータのプログラム P

出力: P が

- 無限ループに陥ってしまっても停止しない... Yes
- 有限の時間内で停止する... No

[停止性判定問題]は決定不能。

↑ この問題を計算するプログラムは存在しない!!

9. Unsolvability

Example of unsolvable problem)

[Halting problem]

Input: Computer program P

Output:

- P will not halt forever... Yes
- P will halt in finite steps... No

[Halting Problem] is unsolvable.

↑ No program can solve the problem!!

9. 決定不能性

[停止性判定問題]の困難さの直感的意味:

Goldbachの予想(1742年):

4より大きい偶数は2個の奇素数の和として表現できる。

例) $8=3+5$, $20=7+13$ など

準備) n 以下の素数をすべて求めることは可能
(エラトステネスのふるいなど)

9. Unsolvability

Intuition of the difficulty of [Halting problem]:

Goldbach's conjecture (1742):

Any even number greater than 4 is
a sum of two odd primes.

Ex) $8=3+5$, $20=7+13$, and so on.

Preliminary)

We can compute all primes less than n .
(e.g., the Sieve of Eratosthenes)

9. 決定不能性

[停止性判定問題]の困難さの直感的意味:

以下のプログラム P を考えると...

$i = 6, 8, 10, \dots$ について

i 以下のすべての素数を求めて

和が i になるペアを探す;

見つからなかったら i を出力して終了.

- P が停止する = Goldbach の予想が否定的に解かれる
- P が停止しない = Goldbach の予想が肯定的に解かれる

プログラムの停止性が計算できるなら、
それを使って多くの未解決問題が解ける!!?

9. Unsolvability

Intuition of the difficulty of [Halting problem]:

Consider the following program P ...

For $i = 6, 8, 10, \dots$

find all primes less than i ;

check all pairs of the primes whose sum make i ;

output i if there are no such pair.

- P halts = Counterexample to Goldbach's conjecture!
- P does not halt = Goldbach's conjecture is true!

If [Halting problem] can be computed,
many open problems can be solved with the program!!?

9. 決定不能性

[停止性判定問題]の決定不能性の証明

準備)

- Turing Machine モデルは万能であること
- 与えられた TM の計算を模倣する TM が構成できること
- 「TM と入力」は TM への入力としてコード化できること

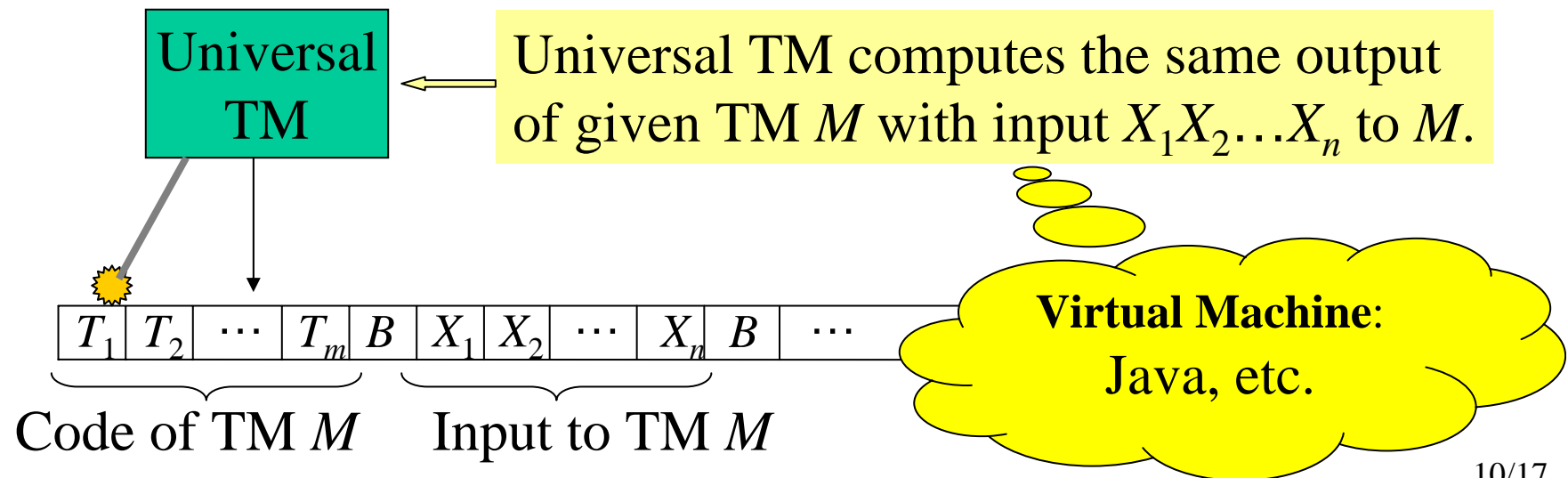


9. Unsolvability

Proof of unsolvability of [Halting problem]

Preliminaries)

- Turing Machine has universality
- A TM can simulate another given TM
- 'TM with an input' can be coded to an input to another TM



9. 決定不能性

[停止性判定問題]の決定不能性の証明

背理法による。

$M(x)$: TM M に入力 x を与えたときの計算

どんな TM のコード M とそれへの入力 x に対しても $M(x)$ の停止性を判定する TM U が存在したと仮定する。

$U(M,x) = \text{Yes}$ $M(x)$ が停止するとき

$U(M,x) = \text{No}$ $M(x)$ が停止しないとき

TM U を改造して、以下の仕様を満たす U' を作る。

$U'(M) = \text{無限ループ}$ $U(M,M)$ が Yes のとき

$U'(M) = \text{停止}$ $U(M,M)$ が No のとき

9. Unsolvability

Proof of unsolvability of [Halting problem]

By contradictions.

$M(x)$ denotes the computation of TM M for input x

Assume that there is a TM U that solves the halting problem for $M(x)$ for any code of TM M and its input x .

$U(M,x) = \text{Yes}$ if $M(x)$ halts

$U(M,x) = \text{No}$ if $M(x)$ does not halt

We modify TM U to U' that satisfies the following:

$U'(M) = \text{infinite loop}$ if $U(M,M)$ is Yes

$U'(M) = \text{halt}$ if $U(M,M)$ is No

どんな TM のコード M とそれへの入力 x に対しても $M(x)$ の停止性を判定する TM U が存在したと仮定する。

$U(M,x) = \text{Yes}$ $M(x)$ が停止するとき ①

$U(M,x) = \text{No}$ $M(x)$ が停止しないとき ②

TM U を改造して、以下の仕様を満たす U' を作る。

$U'(M) = \text{無限ループ}$ $U(M,M)$ が Yes のとき ③

$U'(M) = \text{停止}$ $U(M,M)$ が No のとき ④

$U'(U')$ は停止するのか? ③,④より $U'(U')$ が停止するのは $U(U',U')$ が No のとき。

ケース1: 停止する $U(U',U')$ が No なので②より、
 $U'(U')$ は停止しない ← 仮定に矛盾

ケース2: 無限ループ ③,④より $U'(U')$ が無限ループになるのは $U(U',U')$ が Yes のとき。
 $U(U',U')$ が Yes なので①より、
 $U'(U')$ は停止する ← 仮定に矛盾

よって U は
存在しない!!

Assume that there is a TM U that solves the halting problem for $M(x)$ for any code of TM M and its input x .

$U(M,x) = \text{Yes}$ if $M(x)$ halts ①

$U(M,x) = \text{No}$ if $M(x)$ does not halt ②

We modify TM U to U' that satisfies the following:

$U'(M) = \text{infinite loop}$ if $U(M,M)$ is Yes ③

$U'(M) = \text{halt}$ if $U(M,M)$ is No ④

Does $U'(U')$ halt??

Case 1: halt

By ③,④, $U'(U')$ halts only if $U(U',U')$ is No.

Since $U(U',U')=\text{No}$, by ②,

$U'(U')$ does not halt ← contradiction!!

Case 2: infinite loop

By ③,④, $U'(U')$ does not halt only if $U(U',U')$ is Yes.

Since $U(U',U')=\text{Yes}$, by ①,

$U'(U')$ halts ← contradiction!!

Hence U does not exist!!

9. 決定不能性

決定不能な問題の例

- TM M と入力 x が与えられて
 - $M(x)$ は停止するか?
 - M は x を受理するか?
- 与えられた CFG は曖昧か?
- 与えられた CFL は本質的に曖昧か?
- TM M と言語(仕様) L が与えられたとき、 M が受理する言語は L か? ($L = \Phi$, $L = \Sigma^*$ でも)
- TM M_1 と M_2 が与えられて、 $L(M_1) = L(M_2)$ か?

特定のプログラムにバグがないことを示す方法がない、とは言っていない

任意のプログラムにバグがないことを示す一般的な方法はない

さらなる話題は計算の理論へ

9. Unsolvability

Some examples of unsolvable problems

- For given TM M and input x ,
 - decide if $M(x)$ halts or not?
 - decide if M accepts x or not?
- Is given CFG ambiguous?
- Is given CFL inherently ambiguous?
- For given TM M and language (description) L , is the language accepted by M equal to L ? (Even for $L = \Phi$, $L = \Sigma^*$)
- For given TMs M_1 and M_2 , $L(M_1) = L(M_2)$?

It does not mean that it is impossible to determine if some specific program has bug or not.

It is impossible to determine if any given program has bug or not.

...to Computational Complexity

今後の予定(Schedule)

	授業(Lecture)	Office Hour
May 31 (Wed)	計算の可能性 (Unsolvability) 授業アンケート (questionnaire)	レポート4,5の解答と解説 (Answers and Comments to reports (4) and (5))
June 2 (Fri)	テスト(Final Exam)	---

範囲: 1章~7章

Scope: Chapter 1~Chapter 7