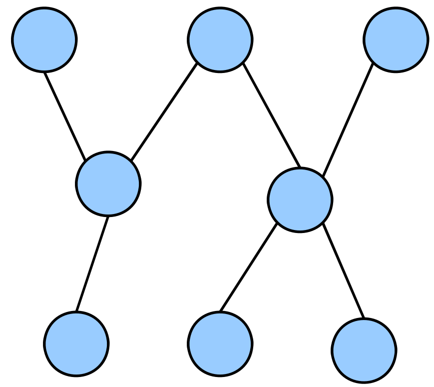
# I118 グラフとオートマトン理論
# Graphs and Automata

担当: 上原 隆平(Ryuhei UEHARA)

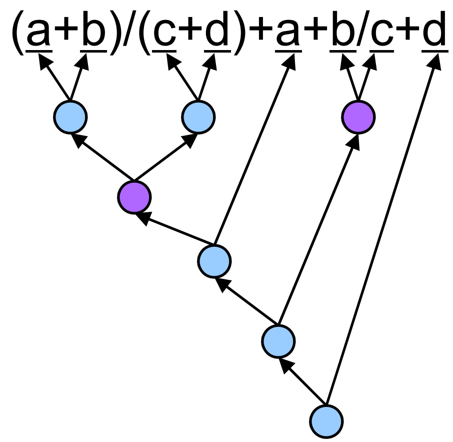
uehara@jaist.ac.jp

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/

# 6.11 木(Tree)



- **<u>木(tree)</u>** … (辺の向きを考えない)閉路がなく，連結なグラフ
- 有向グラフにおいて，ある頂点 *r* からすべての頂点に到達可能であるとき，*r* を**<u>根(root)</u>**という
- **<u>根付き木(rooted tree)</u>** … 一つの頂点が根となる木



# 6.12 根つき木(rooted tree)

- **祖先(ancestor)**
  $v$ 自身，あるいは，$r$ から $v$ に至る経路上の任意の頂点 $u$ を，$v$ の**祖先(ancestor)**という．

- **子孫(descendant)**
  $u$ が $v$ の祖先であるとき，$v$ は $u$ の**子孫(descendant)**であるという．定義より，$u$ 自身も $u$ の子孫である．

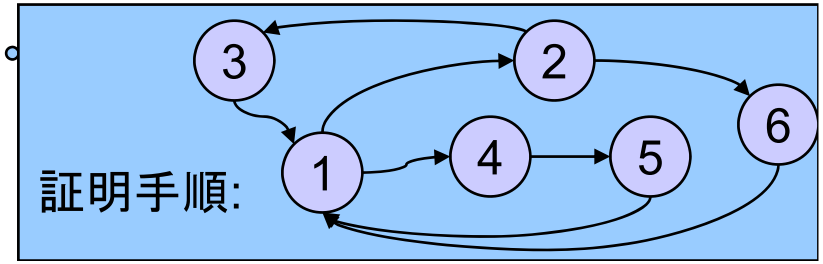
- **親(parent)，子(child)**
  $r$ から $v$ に至る経路の最後の辺が $(u, v)$ であるとき，$u$ は $v$ の**親(parent)**，$v$ は $u$ の**子(child)** であるという．

- **葉(leaf)**
  子のない頂点 (正の次数が0で負の次数が1の頂点)．

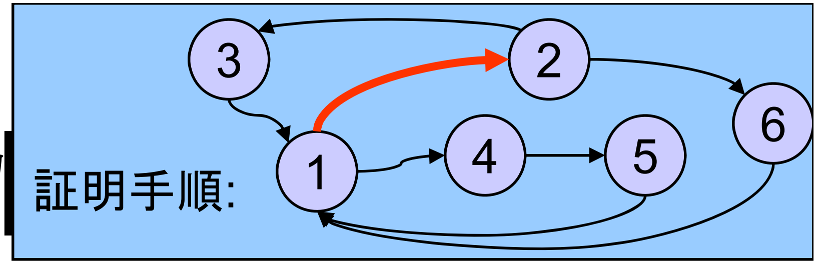
# 6.13 木の性質

- 定理
  *G* = (*V*, *E*) を2個以上の頂点を持つ無向グラフとする. このとき, 以下の条件はすべて同等である.
  1. *G* は木である. (閉路がなく、連結)
  2. *G* における任意の2つの頂点の間には, ただ1つの単純な経路が存在する.
  3. *G* は連結である. しかし, 1つでも辺を取り除くと非連結になる.
  4. *G* は連結で, |*E*| = |*V*| - 1.
  5. *G* は無閉路で, |*E*| = |V| - 1.
  6. *G* は無閉路で, 1つでも辺を加えると閉路ができる.

おまけ: どういうダイアグラム
が証明として成立するのか？



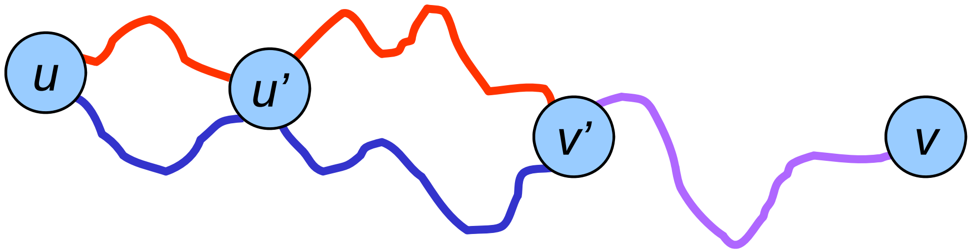
# 6.13 木の




「G は木である（閉路がなく連結）」
→「G における任意の2つの頂点の間には，ただ1つの単純な経路が存在する．」

[証明] (背理法)

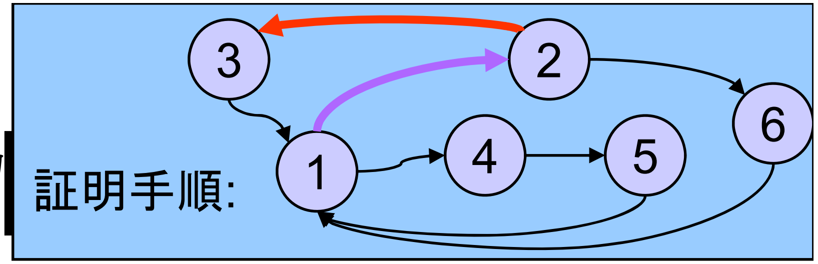
ある2つの頂点*u,v*が存在して、
*u,v*の間に2つの異なる単純な経路が存在したと仮定する。




このとき「*u’*と*v’*の間では2つの経路は共有点を持たない」という2点*u’,v’*が存在する。(2つの経路は異なることから)

*u’,v’*とこの間の2つの経路はサイクルを構成するので、
Gが木であることに矛盾。よってこうした*u,v*は存在しない。

# 6.13 木の




「$G$ における任意の2つの頂点の間には，ただ1つの単純な経路が存在する．」

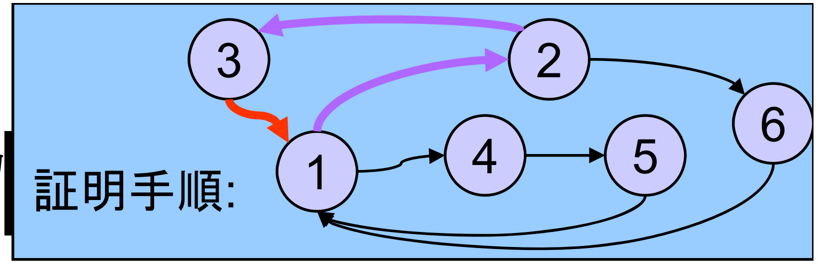
→「$G$は連結である．しかし，1つでも辺を取り除くと非連結になる．

[証明]

仮定より、$G$ は連結である。したがってどの辺を取り除いても$G$が非連結になることを示す。

任意の辺 $e$=$\{u,v\}$ を考える。仮定より、$e$ は $u$, $v$ 間のただ一つの単純な経路である。
したがって $e$ を取り除くと、$u$ から $v$ へ到達できなくなる。
つまり $e$ を取り除くと $G$ は非連結になる。

# 6.13 木の




「Gは連結である. しかし, 1つでも辺を取り除くと非連結になる. →「G は木である(閉路がなく連結)」

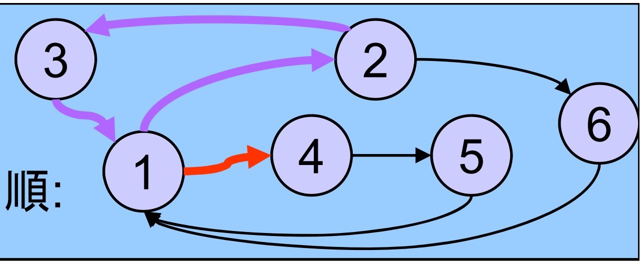
[証明]

Gに閉路がないことを背理法で示す。

Gに閉路($v_1$,$v_2$,…,$v_k$,$v_1$)があったとする。
すると辺$e$={$v_1$,$v_2$}を取り除いても、Gは非連結にならない。
よって仮定に矛盾する。すなわちGは閉路をもたない。

# 6.13 木の

証明手順:




「*G* は木である（閉路がなく連結）」
→「*G* は連結で，$|E| = |V| - 1$．」

[事実] $|V| \geqq 2$であるどんな木も、葉が2つ以上ある。(演習問題。証明しない)

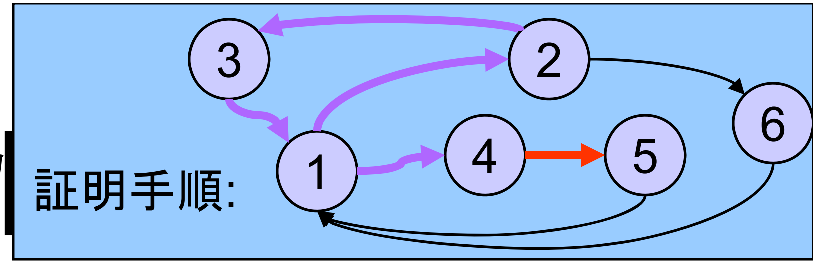
[証明] $|E|=|V|-1$ が成立することを帰納法で証明する。

[基本ステップ] *G*が2頂点からなる木のときは$|V|=2$, $|E|=1$ なので成立。

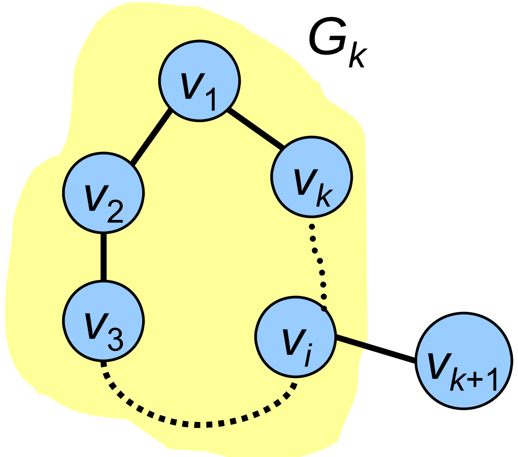
[帰納ステップ] *G*が*n*頂点からなる木として、すべての*n*-1頂点の木 $G'=(V',E')$について $|E'|=|V'|-1$ が成立するとする。

[事実]より *G* は葉 *v* をもつ。*G*から*v*を取り除いたグラフを$G''=(V'',E'')$とすると、$G''$は明らかに木で、*n*-1頂点からなる。
したがって帰納法の仮定から $|E''|=|V''|-1$。
$G''$は*G*から1頂点と1辺を除いたグラフなので、$|E|=|E''|+1=|V''|-1+1=|V|-1$。

# 6.13 木の




「$G$ は連結で，$|E| = |V| - 1$.」
→「$G$ は無閉路で，$|E| = |V| - 1$.」




[証明]　$G$が無閉路であることを背理法で示す。

$G$が閉路 $(v_1,v_2,\ldots,v_k,v_1)$ をもったと仮定する。

$V_k=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$とし$V_k$による誘導部分グラフを$G_k=(V_k,E_k)$とする。
このとき$G_k$は上記の閉路を含むので$|E_k|\geqq k$である。

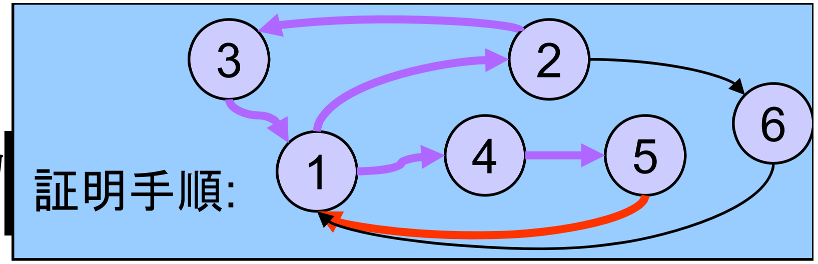
$|V|=k$とすると$|E|=|E_k|\geqq k=|V|$と$|E|=|V|-1$が矛盾する。したがって$k<|V|$。

$G$は連結なので、$V_k$中のある$v_i$に隣接し、$v_{k+1}\in V$かつ$v_{k+1}\notin V_k$を満たす頂点$v_{k+1}$が存在するはずである。

$G_k$に$v_{k+1}$を追加した誘導部分グラフを$G_{k+1}=(V_{k+1},E_{k+1})$とする。
$|V|=k+1$とすると$|E|=|E_k|\geqq k+1=|V|$と$|E|=|V|-1$が矛盾。　（＊）

（＊）は頂点数が$|V|$になるまで繰り返すことができるが、このとき$|E|\geqq|V|$を得て矛盾。

# 6.13 木の




「$G$ は無閉路で, $|E| = |V| - 1$. 」
→「$G$は木（無閉路で連結）」

4. $G$ は連結で,
$|E| = |V| - 1$.

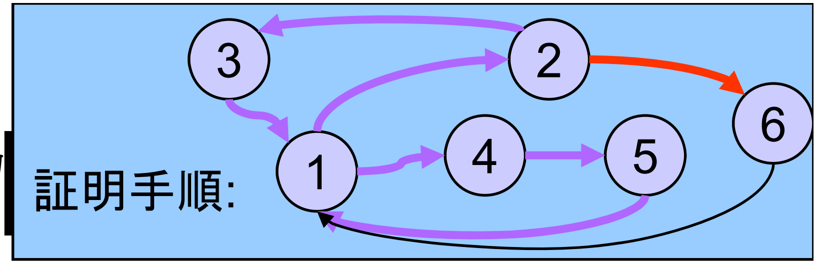
[証明]　$G$が連結であることを示せばよい。

$G$の連結成分の個数を$k$個とする。
$G$の連結成分をそれぞれ$G_1, G_2, \ldots, G_k$と書く。
各$G_i$は連結で無閉路なので、木である。

各木$G_i$に対して、[1→4]より、$G_i=(V_i,E_i)$とすると$|V_i|=|E_i|+1$である。

したがって
$|V|=|V_1|+|V_2|+\ldots+|V_k|=(E_1+1)+(E_2+1)+\ldots+(E_k+1)=|E|+k$。
仮定より $|V|=|E|+1$ なので、$k=1$ を得る。

# 6.13 木の




「*G* における任意の2つの頂点の間には，ただ1つの単純な経路が存在する．」

→「*G* は無閉路で，1つでも辺を加えると閉路ができる．」

[証明]

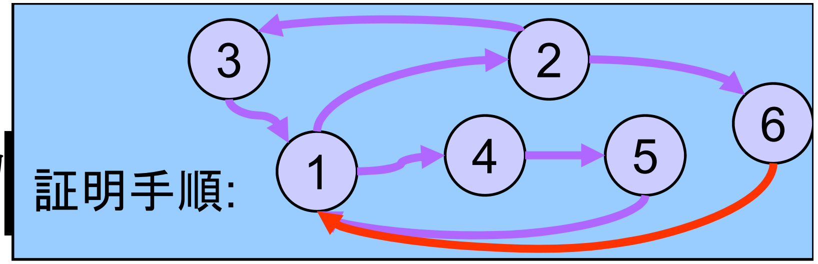
[無閉路であること]

閉路があったとすると、閉路上の2頂点には2つの経路が存在する。したがって条件に矛盾。よって閉路はない。

[1つでも辺を加えると閉路ができること]

隣接しない2頂点$u,v$間に辺を加えると、$u,v$間のただ1つの単純な経路と追加した辺で、閉路ができる。

# 6.13 木の




「*G* は無閉路で，1つでも辺を加えると閉路ができる．」
→「*G*は木(閉路がなく連結)」

[証明]

隣接しない2頂点*u*,*v*間に辺を加えると閉路ができることから、
*u*,*v*間は到達可能である。したがって*G*は連結。

[証明おわり]