I118 グラフとオートマトン理論
Graphs and Automata

担当: 上原 隆平(Ryuhei UEHARA)

uehara@jaist.ac.jp

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/

6.14 グラフにおける探索木 (Search Tree in a Graph)

- グラフG=(V,E)における探索アルゴリズム:
  1. Q:={v_0} for some v_0 in V;
  2. while $Q \neq \varphi$ do
     1. pick up a vertex v from Q
     2. process something at the vertex v;
     3. put all unvisited vertices in $N(v)$ into Q;
  3. if some vertex u not processed, put u into Q and go to step 2.

Step 2.3 での unvisited vertices を Q のどこに入れるか？
(The place in Q at step 2.3 is the key point)

6.14 グラフにおける探索木 (Search Tree in a Graph)

- グラフG=(V,E)における探索アルゴリズム:

  2.3 put all unvisited vertices in N(v) into Q;

- 深さ優先探索(Depth first search; DFS)
  - Qの「先頭」に要素を置く(put them at top)

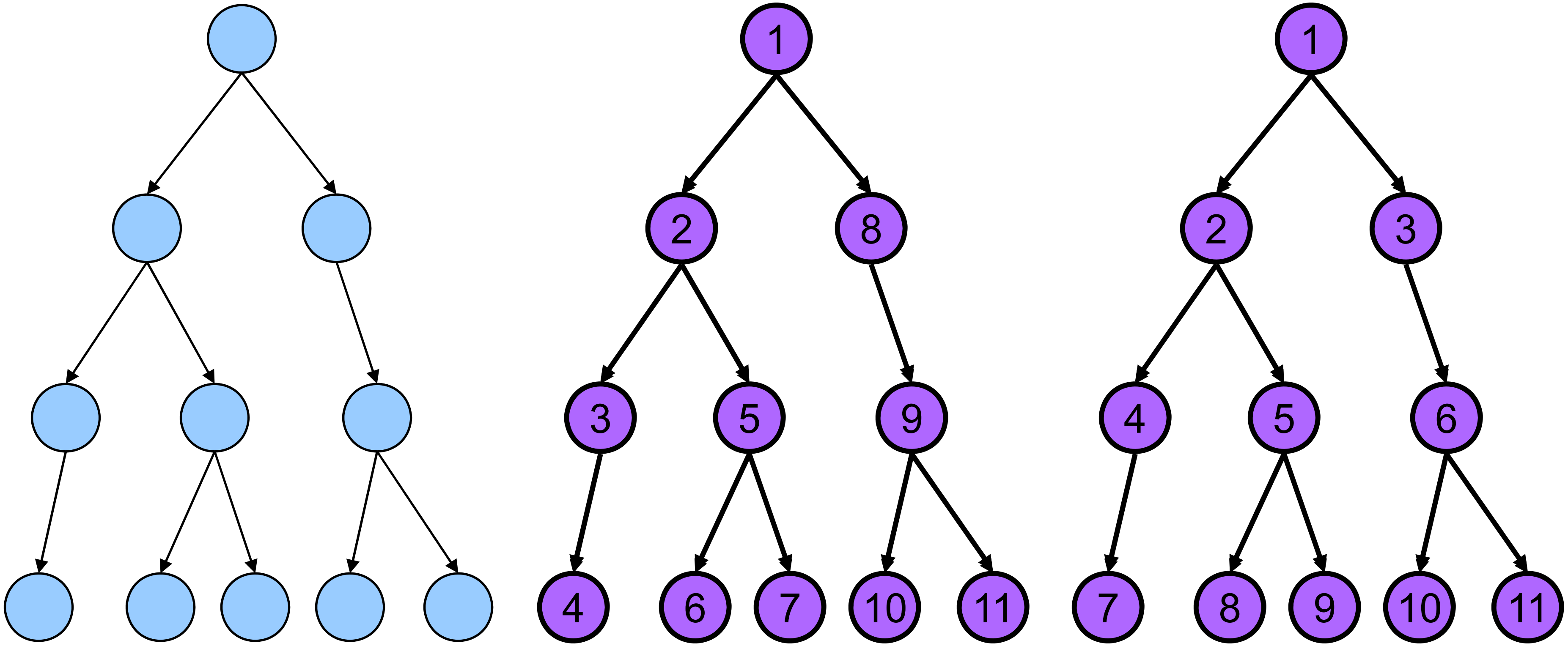
    FILO (First In Last Out)

- 幅優先探索(Breadth first search; BFS)
  - Qの「最後」に要素を置く(put them at tail)

    FIFO (First In First Out)

(頂点の“評価関数”に応じて挿入(by some “score”))

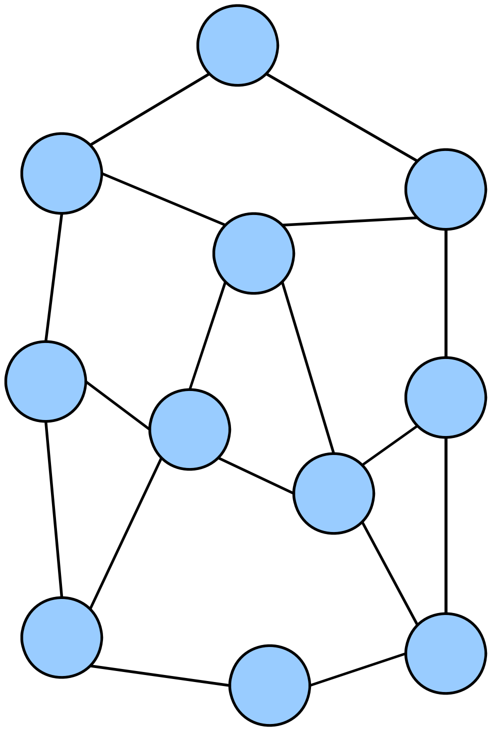
BFSとDFSの例(1)

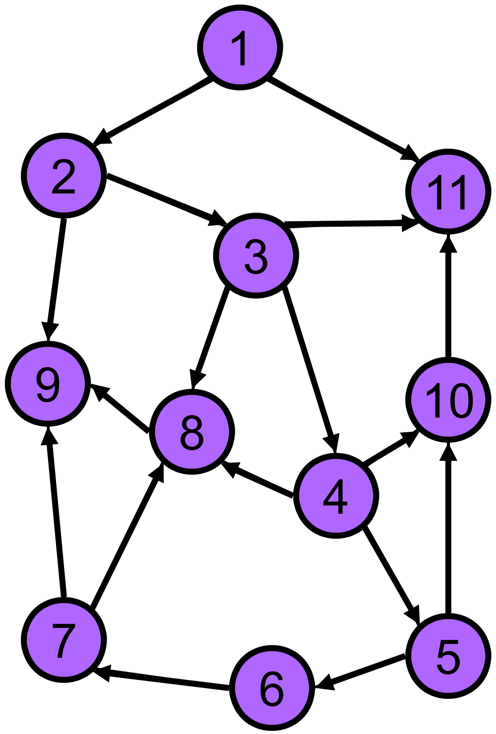


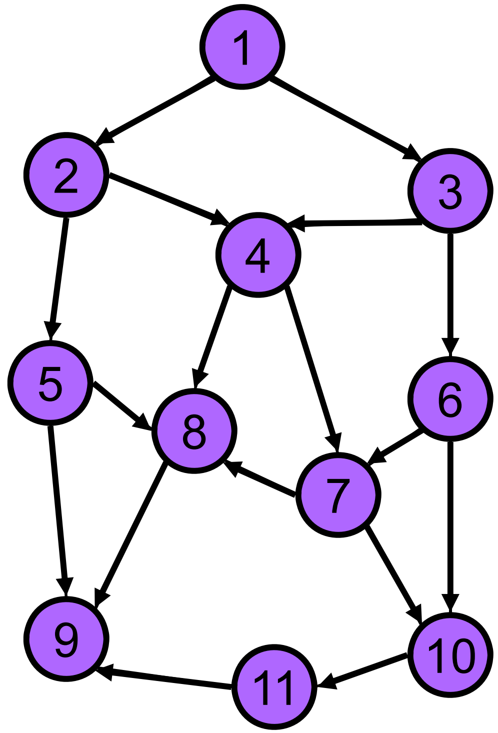
深さ優先(DFS)　　幅優先(BFS)

BFS と DFS の例(2)

探索に不要な辺を除くと、無向グラフの中の探索木になる。





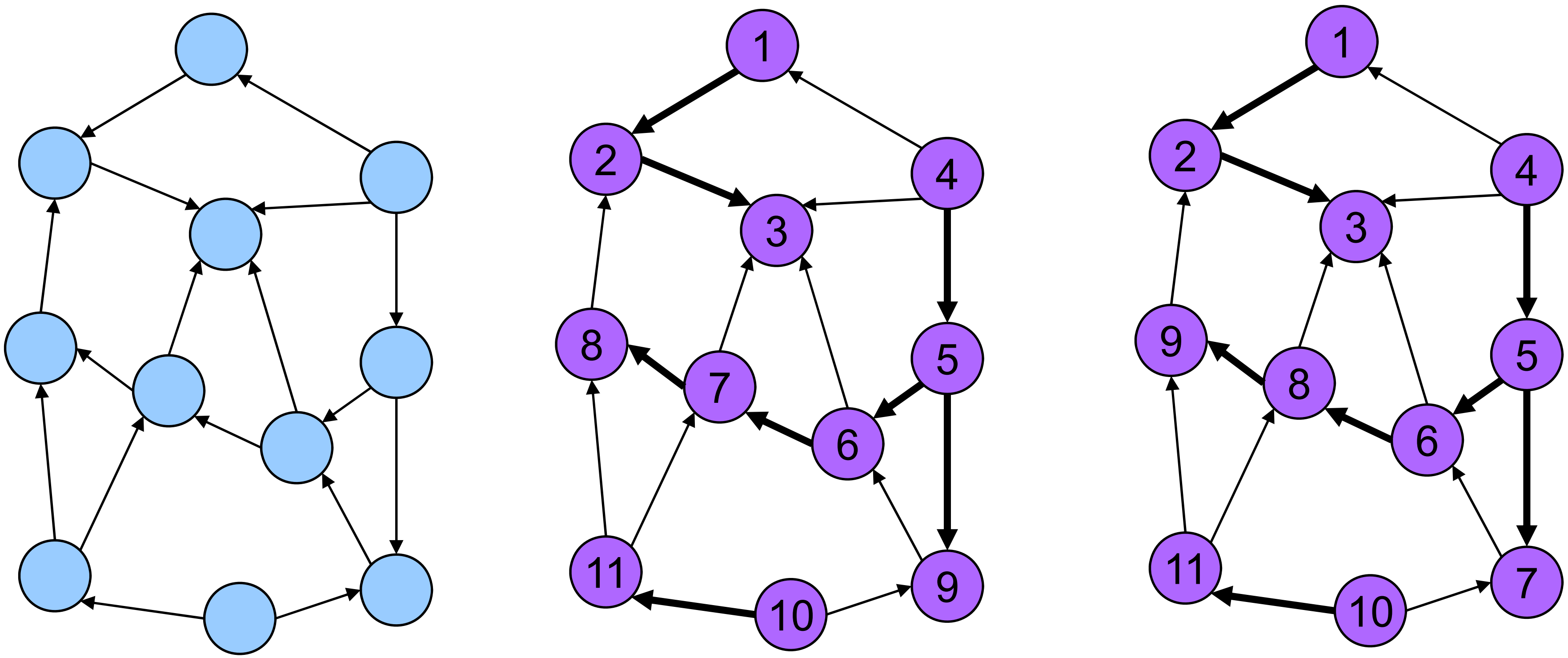


[Note] tie-break で、
選択の余地は残る。
lexicographically BFSなど

深さ優先(DFS)　幅優先(BFS)

BFSとDFSの例(3)

探索に不要な辺を除くと、有向グラフの中の<u>探索森</u>になる。



深さ優先(DFS)　幅優先(BFS)

深さ優先探索 – DFS(G) (Queueを使わない実装)

DFS(G)

1. **for each** $v \in V$ **do**
   color(v) ← WHITE; pred(v) ← NULL;
2. time ← 0
3. **for each** $v \in V$ **do**
   if color(v) = WHITE **then** DFS_visit(v)

DFS_visit(v)

DFS_visit(v)

1. color(v) ← GRAY
2. d(v) ← time ← time + 1
3. **for each** $u \in$ Adj(v) **do**
4.   **if** color(u) = WHITE
5.   **then** pred(u) ← v
6.   DFS_visit(u)
7. color(v) ← BLACK
8. f(v) ← time ← time + 1

頂点vを訪れた時刻
(arrival time to v)

u には v から来た。
(root はNullのまま)
u is visited from v.
(roots remain null)

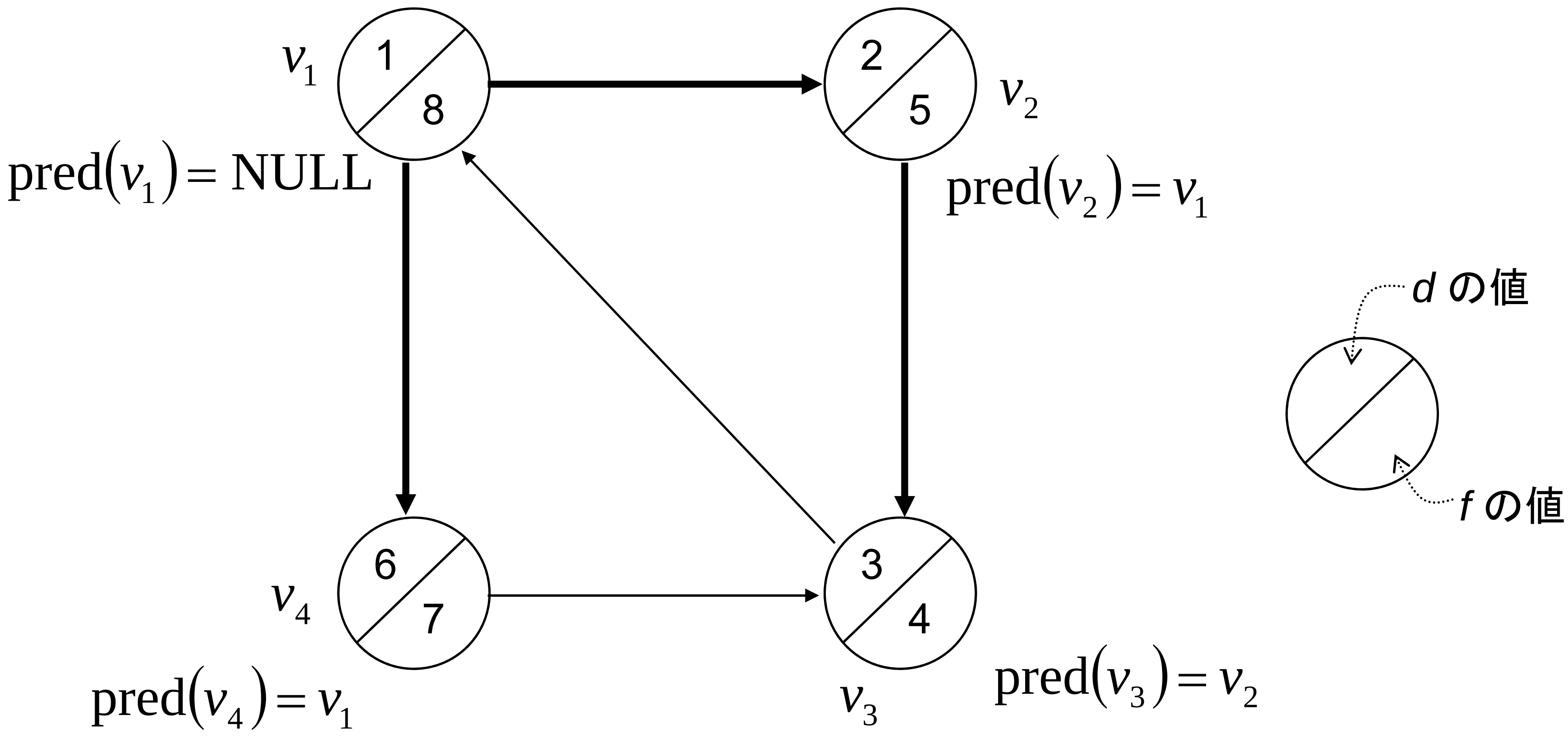
頂点vを離脱した時刻
(departure time from v)

深さ優先探索森

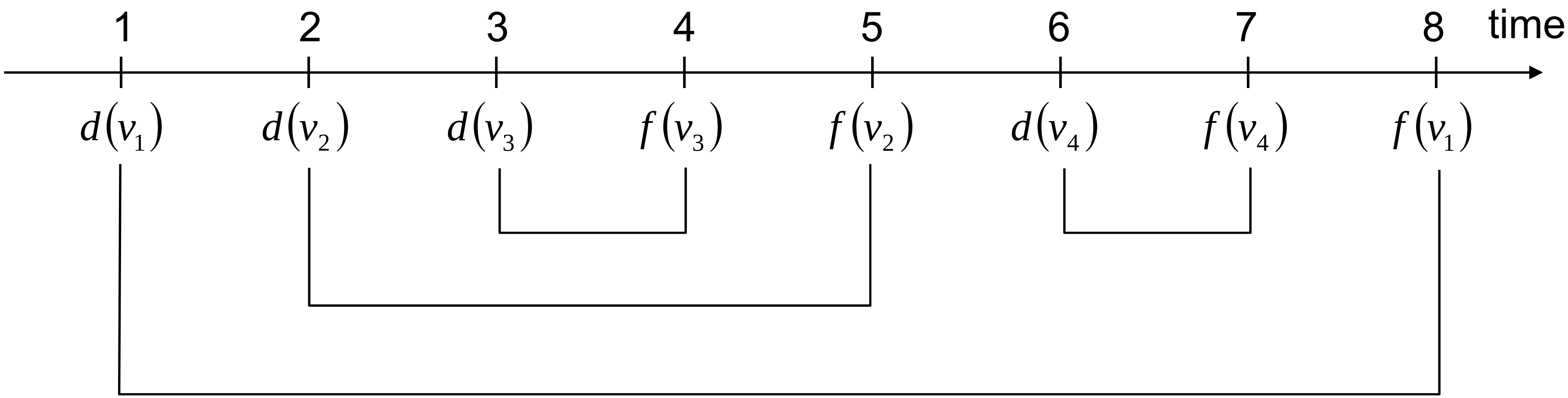
- グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索$G_d = (V, E_d)$
  - 深さ優先探索の結果のグラフは，一般的に言って，森となる.

$$E_d = \left\{ (\mathrm{pred}(v), v) \,\middle|\, \begin{array}{l} v \in V \\ \wedge\ \mathrm{pred}(v) \neq \mathrm{NULL} \end{array} \right\}$$

深さ優先探索による探索順，番号づけの例



深さ優先探索による探索順の性質



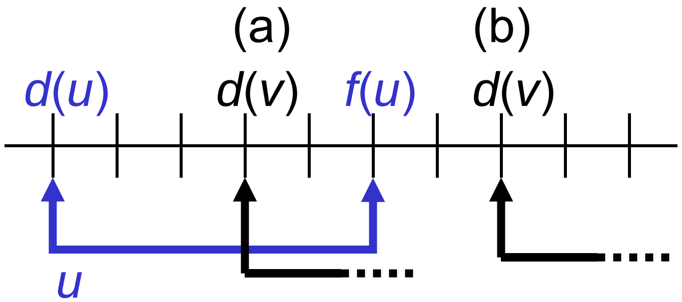
$$(v_1 \quad (v_2 \quad (v_3 \quad v_3) \quad v_2) \quad (v_4 \quad v_4) \quad v_1)$$

カッコの定理 (parenthesis theorem)

- 定理
  グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索において，任意の2つの頂点 u, v ($u \neq v$) について，以下の条件のうちただ1つが成立する．

1. 区間 $[d(u), f(u)]$ と $[d(v), f(v)]$ は重なりを持たず，結果の深さ優先探索森において，u, v のどちらかが他方の子孫となることはない．
2. 区間 $[d(u), f(u)]$ は $[d(v), f(v)]$ に完全に含まれ，ある深さ優先探索木において，u は v の子孫となる．
3. 2の逆

[Observation]
- $d(u),d(v),f(u),f(v)$はすべて異なる
- $d(u)<f(u)$, $d(v)<f(v)$



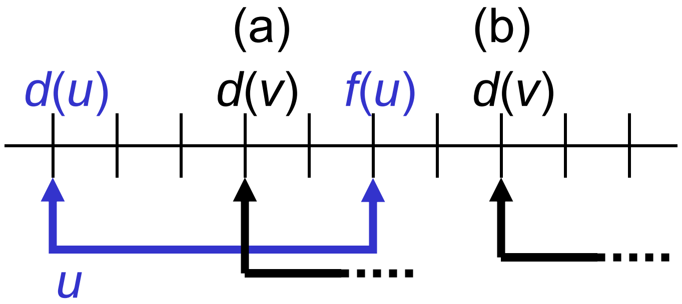
証明

[Observation]
- $d(u)$,$d(v)$,$f(u)$,$f(v)$はすべて異なる
- $d(u)<f(u)$, $d(v)<f(v)$

- 一般性を失うことなく、$d(u) < d(v)$ と仮定する。このとき次の2つの場合がある。
  - (a) $d(v) < f(u)$ の場合
  - (b) $d(v) > f(u)$ の場合

(a)の場合:

- u がまだ GRAY のとき, v がみつかった。
- したがって, このとき v は u の子孫である。
- さらに, v が見つかってから, それに隣接する頂点がすべて探索され, 最後に v が black にされる. その後, (いつか) 探索は頂点 u に戻り, u が black　にされる. よって, このとき区間 $[d(v), f(v)]$ は $[d(u), f(u)]$ に完全に含まれる.



証明

[Observation]
- $d(u), d(v), f(u), f(v)$はすべて異なる
- $d(u)<f(u)$, $d(v)<f(v)$

- 一般性を失うことなく、$d(u) < d(v)$ と仮定する。このとき次の2つの場合がある。
  - (a) $d(v) < f(u)$ の場合
  - (b) $d(v) > f(u)$ の場合

(b)の場合:

- $d(u)<f(u)<d(v)$より、区間 $[d(u), f(u)]$ と $[d(v), f(v)]$ は重なりを持たない。
- よって, u と v のいずれかが GRAY のときに他方が見つかることはない。
- したがってどちらの頂点も他方の子孫とはならない。

系

- 系6.14.1
  - グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において，頂点 v が頂点 u の子孫であるのは，

    $d(u) < d(\mathrm{v}) < f(v) < f(u)$

    のとき，かつそのときに限る．

定理 (White-path theorem)

定理

グラフ G = (V, E) の深さ優先探索森において，頂点 v が頂点 u の子孫であるのは，u が見つけられたときに，WHITE の頂点のみからなる経路によって，u から v に到達できるときであり、かつそのときに限る.

証明

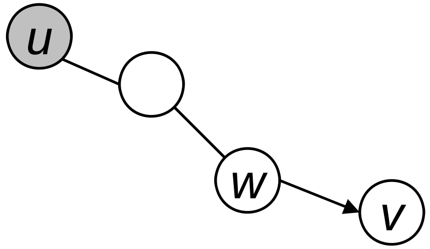
グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において，
頂点 v が頂点 u の子孫であるならば，u が
見つけられたときに，WHITE の頂点のみから
なる経路によって，u から v に到達できる.

- →の証明

w を，その深さ優先探索木における u と v を結ぶ経路上の任意の頂点とする。

すると w は u の子孫である. よって，系より，$d(u) < d(w) < f(w) < f(u)$ であるので，$d(u)$ の時点では，w は WHITE である.

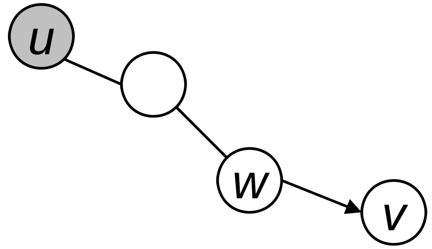
証明



グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において，u が見つけられたときに，WHITE の頂点のみからなる経路によって，u から v に到達できるならば、頂点 v は頂点 u の子孫である。

- ←の証明
  - 深さ優先探索木において，頂点 v が頂点 u の子孫とならないと仮定する.
  - 一般性を失うことなく，その経路における他のすべての頂点は，u の子孫であると仮定できる.
  - w を，w=pred(v) を満たす頂点とする.
  - $w=u$は仮定に矛盾する。よって$w \neq u$。

証明



グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において，u が見つけられたときに，WHITE の頂点のみからなる経路によって，u から v に到達できるならば、頂点 v は頂点 u の子孫である。

- ←の証明
  - 系より，$d(u)<d(w)<f(w) < f(u)$ である．そこで，v が見つかるのは，u が見つかった後で，w が black にされる前となる．
  - よって $d(u)<d(v)<f(w)<f(u)$。
  - カッコの定理より，$[d(v), f(v)]$ は，$[d(u), f(u)]$ に完全に含まれることになる．よって系より，結局 v は u の子孫でなければならない．

おまけ問題(Exercise)

無向グラフ上で深さ優先探索を行う。このとき、探索木に含まれない辺 $e=\{u,v\}$に対して、u,vは探索木上で先祖/子孫の関係にあることを示せ。

Perform the DFS on a undirected graph. Let $e=\{u,v\}$ be an edge not on the DFS tree. Then, prove that u and v are ancestor-descendant relation.