

1118 グラフとオートマトン理論 Graphs and Automata

担当: 上原 隆平 (Ryuhei UEHARA)
uehara@jaist.ac.jp
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/>

1/20

6.14 グラフにおける探索木 (Search Tree in a Graph)

- グラフ $G=(V,E)$ における探索アルゴリズム:
 1. $Q:=\{v_0\}$ for some v_0 in V ;
 2. while $Q \neq \emptyset$ do
 1. pick up a vertex v from Q
 2. process something at the vertex v ;
 3. put all unvisited vertices in $N(v)$ into Q ;
 3. if some vertex u not processed, put u into Q and go to step 2.

Step 2.3 での unvisited vertices を Q のどこに入れるか?
 (The place in Q at step 2.3 is the key point)

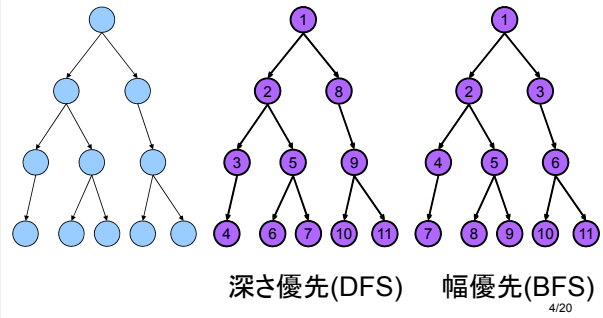
2/20

6.14 グラフにおける探索木 (Search Tree in a Graph)

- グラフ $G=(V,E)$ における探索アルゴリズム:
 - 2.3 put all unvisited vertices in $N(v)$ into Q ;
 - 深さ優先探索 (Depth first search; DFS)
 - Q の「先頭」に要素を置く (put them at top)
 - FILO (First In Last Out)
 - 幅優先探索 (Breadth first search; BFS)
 - Q の「最後」に要素を置く (put them at tail)
 - FIFO (First In First Out)
- (頂点の“評価関数”に応じて挿入 (by some “score”))

3/20

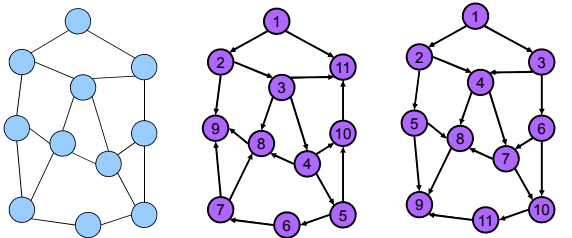
BFS と DFS の例(1)



4/20

BFS と DFS の例(2)

探索に不要な辺を
除くと、無向グラフの
中の探索木になる。



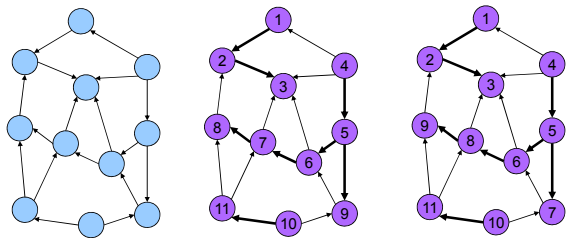
[Note] tie-break で、
選択の余地は残る。
lexicographically BFS など

深さ優先 (DFS) 幅優先 (BFS)

5/20

BFS と DFS の例(3)

探索に不要な辺を
除くと、有向グラフの
中の探索森になる。



深さ優先 (DFS) 幅優先 (BFS)

6/20

深さ優先探索 – DFS(G) (Queueを使わない実装)

DFS(G)

1. **for each** $v \in V$ **do**
 $\text{color}(v) \leftarrow \text{WHITE}; \text{pred}(v) \leftarrow \text{NULL};$
2. $\text{time} \leftarrow 0$
3. **for each** $v \in V$ **do**
 if $\text{color}(v) = \text{WHITE}$ **then** DFS_visit(v)

7/20

DFS_visit(v)

DFS_visit(v)

1. $\text{color}(v) \leftarrow \text{GRAY}$
2. $d(v) \leftarrow \text{time} \leftarrow \text{time} + 1$
3. **for each** $u \in \text{Adj}(v)$ **do**
4. **if** $\text{color}(u) = \text{WHITE}$
5. **then** $\text{pred}(u) \leftarrow v$
6. DFS_visit(u)
7. $\text{color}(v) \leftarrow \text{BLACK}$
8. $f(v) \leftarrow \text{time} \leftarrow \text{time} + 1$

頂点 v を訪れた時刻
(arrival time to v)

u には v から来た。
(root は Nullのまま)
 u is visited from v .
(roots remain null)

頂点 v を離脱した時刻
(departure time from v)

8/20

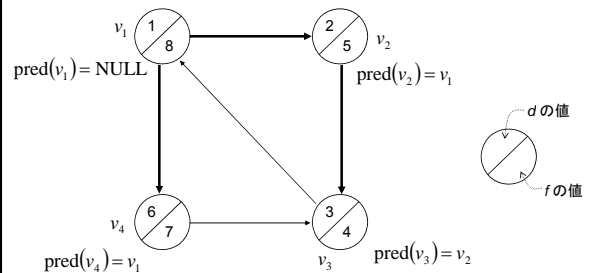
深さ優先探索森

- グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索 $G_d = (V, E_d)$
– 深さ優先探索の結果のグラフは、一般的に言って、森となる。

$$E_d = \left\{ (\text{pred}(v), v) \mid v \in V \wedge \text{pred}(v) \neq \text{NULL} \right\}$$

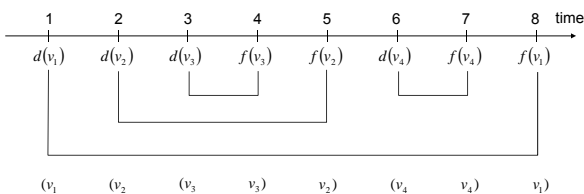
9/20

深さ優先探索による探索順, 番号づけの例



10/20

深さ優先探索による探索順の性質



11/20

カッコの定理 (parenthesis theorem)

- 定理
グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索において、任意の2つの頂点 $u, v (u \neq v)$ について、以下の条件のうちただ1つが成立する。

 1. 区間 $[d(u), f(u)]$ と $[d(v), f(v)]$ は重なりを持たず、結果の深さ優先探索森において、 u, v のどちらかが他方の子孫となることはない。
 2. 区間 $[d(u), f(u)]$ は $[d(v), f(v)]$ に完全に含まれ、ある深さ優先探索木において、 u は v の子孫となる。
 3. 2の逆

[Observation]

- $d(u), d(v), f(u), f(v)$ はすべて異なる
- $d(u) < f(u), d(v) < f(v)$

[Observation]

- $d(u), d(v), f(u), f(v)$ はすべて異なる
- $d(u) < f(u), d(v) < f(v)$

証明

- 一般性を失うことなく、 $d(u) < d(v)$ と仮定する。このとき次の2つの場合がある。
 - (a) $d(v) < f(u)$ の場合
 - (b) $d(v) > f(u)$ の場合

(a)の場合:

- u がまだ GRAY のとき、 v がみつかった。
- したがって、このとき v は u の子孫である。
- さらに、 v が見つかったから、それに隣接する頂点がすべて探索され、最後に v が black にされる。その後、(いつか) 探索は頂点 u に戻り、 u が black にされる。よって、このとき区間 $[d(v), f(v)]$ は $[d(u), f(u)]$ に完全に含まれる。

13/20

[Observation]

- $d(u), d(v), f(u), f(v)$ はすべて異なる
- $d(u) < f(u), d(v) < f(v)$

証明

- 一般性を失うことなく、 $d(u) < d(v)$ と仮定する。このとき次の2つの場合がある。
 - (a) $d(v) < f(u)$ の場合
 - (b) $d(v) > f(u)$ の場合

(b)の場合:

- $d(u) < f(u) < d(v)$ より、区間 $[d(u), f(u)]$ と $[d(v), f(v)]$ は重なりを持たない。
- よって、 u と v のいずれかが GRAY のときに他方が見つかることはない。
- したがってどちらの頂点も他方の子孫とはならない。

14/20

系

- 系6.14.1
 - グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において、頂点 v が頂点 u の子孫であるのは、 $d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$ のとき、かつそのときに限る。

15/20

定理 (White-path theorem)

定理

グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において、頂点 v が頂点 u の子孫であるのは、 u が見つけれられたときに、WHITE の頂点のみからなる経路によって、 u から v に到達できるときであり、かつそのときに限る。

16/20

証明

グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において、頂点 v が頂点 u の子孫であるならば、 u が見つけれられたときに、WHITE の頂点のみからなる経路によって、 u から v に到達できる。

- の証明
 - w を、その深さ優先探索木における u と v を結ぶ経路上の任意の頂点とする。
 - すると w は u の子孫である。よって、系より、 $d(u) < d(w) < f(w) < f(u)$ であるので、 $d(u)$ の時点では、 w は WHITE である。

17/20

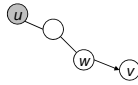
証明

グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において、 u が見つけれられたときに、WHITE の頂点のみからなる経路によって、 u から v に到達できるならば、頂点 v は頂点 u の子孫である。

- ←の証明
 - 深さ優先探索木において、頂点 v が頂点 u の子孫とならないと仮定する。
 - 一般性を失うことなく、その経路における他のすべての頂点は、 u の子孫であると仮定できる。
 - w を、 $w = \text{pred}(v)$ を満たす頂点とする。
 - $w = u$ は仮定に矛盾する。よって $w \neq u$ 。

18/20

証明



グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索木において、 u が見つけれられたときに、WHITE の頂点のみからなる経路によって、 u から v に到達できるならば、頂点 v は頂点 u の子孫である。

←の証明

- 系より, $d(u) < d(w) < f(w) < f(u)$ である。そこで, v が見つかるのは, u が見つかった後で, w が black にされる前となる。
- よって $d(u) < d(v) < f(w) < f(u)$ 。
- カッコの定理より, $[d(v), f(v)]$ は, $[d(u), f(u)]$ に完全に含まれることになる。よって系より, 結局 v は u の子孫でなければならない。

19/20

おまけ問題(Exercise)

無向グラフ上で深さ優先探索を行う。

このとき、探索木に含まれない辺 $e = \{u, v\}$ に対して、 u, v は探索木上で先祖/子孫の関係にあることを示せ。

Perform the DFS on a undirected graph. Let $e = \{u, v\}$ be an edge not on the DFS tree. Then, prove that u and v are ancestor-descendant relation.

