

今日の予定

1. 展開図の基礎的な知識

1. 正多面体の共通の展開図

} 1時間目～2時間目

2. ペタル型の紙で折るピラミッド型: 2時間目～3時間目

3. (複数の箱が折れる共通の展開図: 3時間目?)

Bumpy Pyramid Folding

Zachary Abel (MIT)

Erik Demaine (MIT)

Martin Demaine (MIT)

Hiro Ito (Univ. of Electro-Communications)

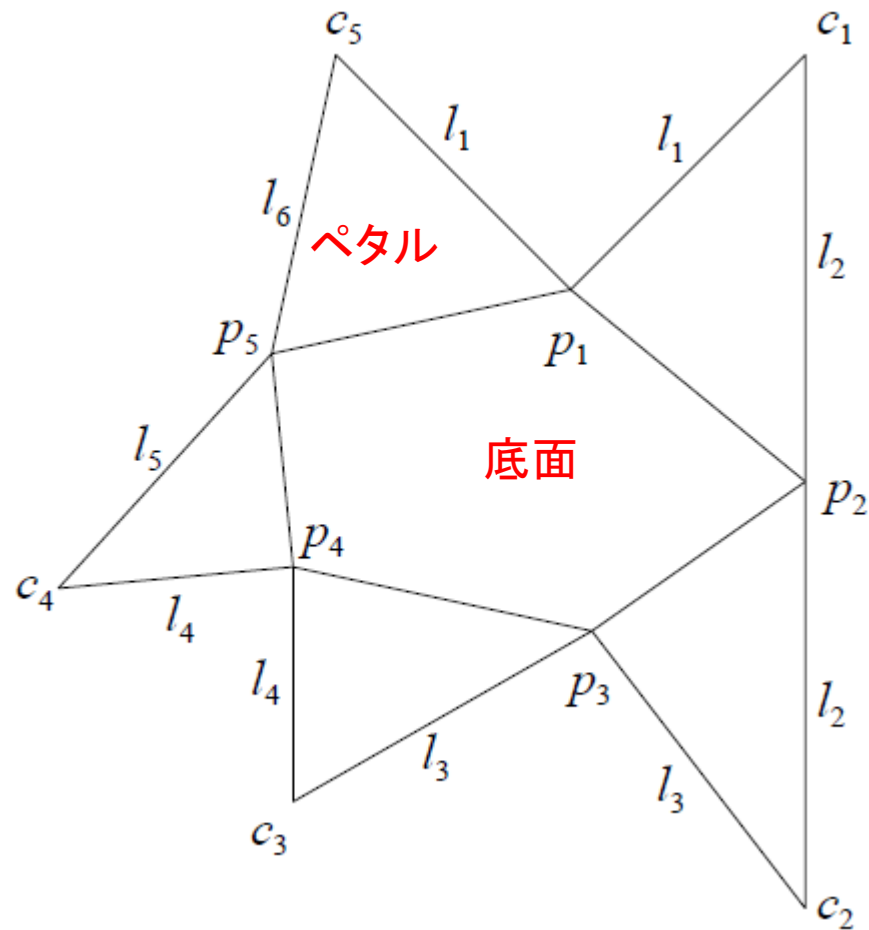
Jack Snoeyink (The University of North Carolina)

[Ryuhei Uehara \(JAIST\)](#)

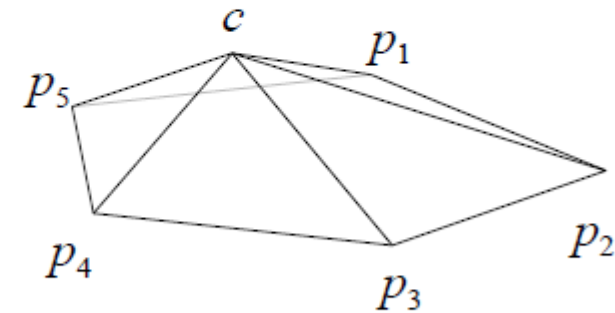
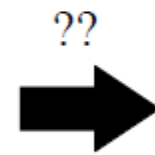
文献

Zachary Abel, Erik D. Demaine, Martin Demaine, Hiro Ito, Jack Snoeyink and Ryuhei Uehara: Bumpy Pyramid Folding, *The 26th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2014)*, 2014/08/11-2014/08/13, Halifax, Canada.

Bumpy Pyramid Folding



計算幾何学
(計算折り紙)の問題



Background (1)

➤ ある日、パズル関係の知人から手紙が届く...

1. 折り紙の問題1:

入力: 周囲にペタルのついた三角形

出力: ここから三角錐が折れるか?

結論: 接着される辺同士の長さが合っていて、
十分長ければ可能

2. 折り紙の問題2:

入力: 周囲にペタルのついた4角形

出力: ここから4角錐(ピラミッド)が折れるか?

観測: 一般に2通りの折り方があり、凸と凹になる...?

(一般化)ピラミッド問題

入力: 周囲にペタルのついた凸 n 角形

問題1: ここから n 角錐(ピラミッド)が折れるか?

一般には「ならない」が、立体は折れることが多い

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか?

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか?

メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

メタ²問題2: 二つの問題の解が同じになるのはどんなときか?

底面の三角形分割
ごとに異なる凸凹
な立体が折れる

Background (2)

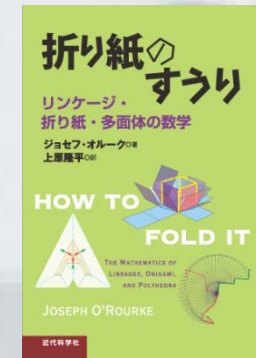
➤ 「折り」と「展開」の問題

- 1500年代に研究が始まったが、わかっていることは、あまりない
- 近年、計算幾何学の有望なテーマ

➤ 最大の未解決問題(予想):

どんな凸多面体も、辺に沿って切るだけで**展開図**に展開できる。ただし**展開図**とは、以下の条件を満たす多角形:

- 重なりを持たない(←これが難しい)
- 連結である



Background (2)

➤ 最大の未解決問題(予想):

どんな凸多面体も, 辺に沿って切るだけで
展開図に展開できる. ただし**展開図**とは,
以下の条件を満たす多角形:

- 重なりを持たない
- 連結である

➤ ピラミッド問題は, 凸多面体の展開の最初の ステップの逆問題に見える...

既存の関連結果

1. Alexandrovの定理(1942)

幾何情報(距離情報と組合せ的な構造)が与えられたとき、「**凸**多面体の体積」は一意的に決まる。
⇒ほとんどの**凸**多面体は展開図と折り方が与えられるとユニークに決まる。

- 体積を求める多項式: Sabitov 1998.
- 構成的証明: Bobenko, Izvestiev 2008.
- 多項式時間アルゴリズム: Kane, et al. 2009.
...実行時間は $O(n^{456.5})$

⇒今回の問題は特殊なケースの研究

今回の結果(1)

1. 折り紙の問題1:

入力: 周囲にペタルのついた三角形

出力: ここから三角錐が折れるか?

結論: 接着される辺同士の長さが合っていて,
十分長ければ可能

...Sabitov の多項式で計算した体積が正であればよい。

$$V^2 = \frac{1}{144} [l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_2^2 l_3^2 l_5^2 - l_1^2 l_3^2 l_6^2 - l_4^2 l_5^2 l_6^2].$$

今回の結果(2)

1. 折り紙の問題2:

入力: 周囲にペタルのついた4角形

出力: ここから4角錐(ピラミッド)が折れるか?

- 底面の4角形を対角線で切ると二つの4面体を接着した立体ができる

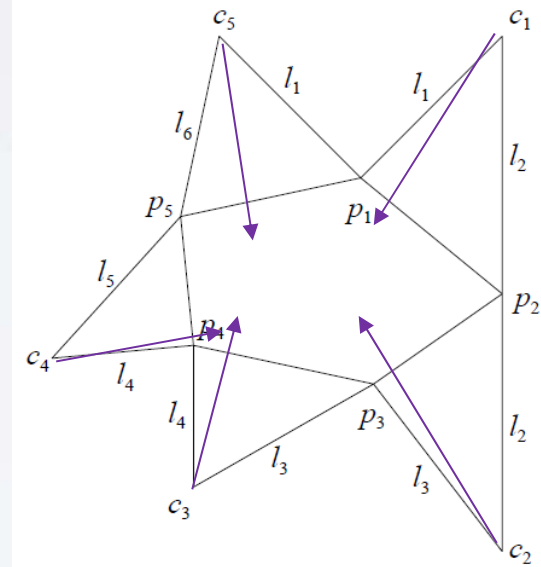
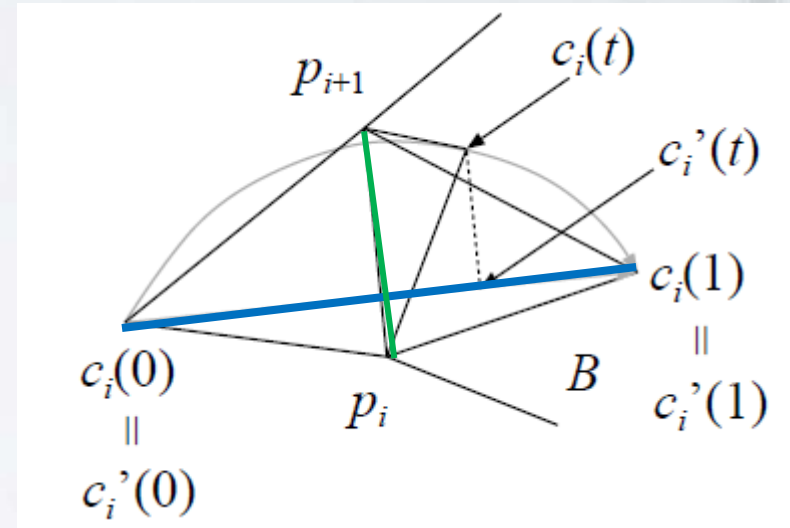
1. 2通りの切り方で体積が同じ: ピラミッドができる
2. 体積が異なるなら、一方は凸で一方は凹
3. (凸な方だけできることもある)

Sabitovの結果だけでは、ここから先は難しい...

重要なObservation

頂点を折り返すとき、
頂点の写像の軌跡は
底面の辺に対する垂線となる

⇒ピラミッドを折るときの頂点の
動きを上から見ると、
「軌跡」が計算できる



(一般化)ピラミッド問題:解(1)

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

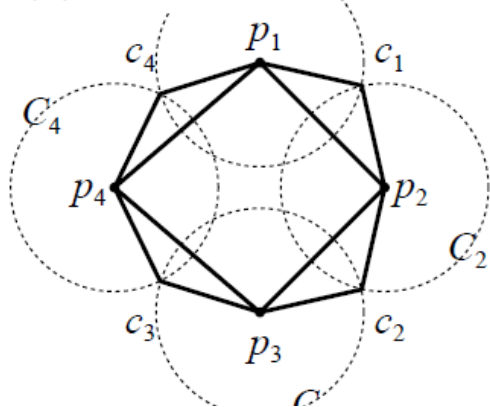
問題1: ここから n 角錐(ピラミッド)が折れるか?

[解答] 各頂点からの垂線が1点で交わればよい!

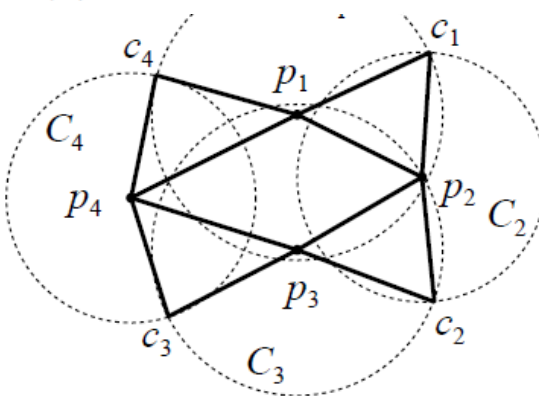
(+ 頂点が十分な高さを持つことも必要)

線形時間で簡単に判定できる。

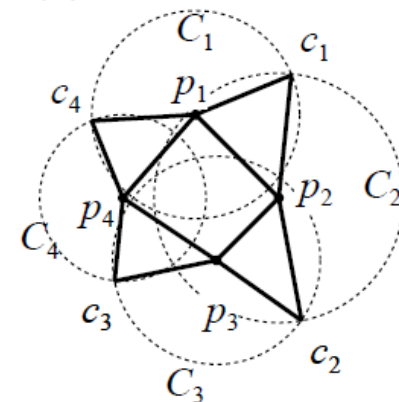
例: (1) できない



(2) 凸だけできる



(3) 凸と凹が両方できる



(一般化)ピラミッド問題:解(2)

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか?

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか?

[解] 多項式時間アルゴリズムがある。DPで $O(n^3)$

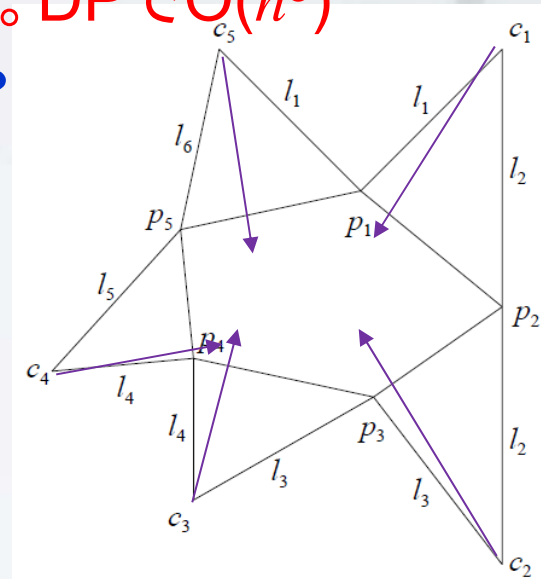
メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

[解] 一般に違う(凹>凸がある)

メタ²問題2: 二つの問題の解が

同じになるのはどんなときか?

[未解決] わかりません...



(一般化)ピラミッド問題:解(3)

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか?

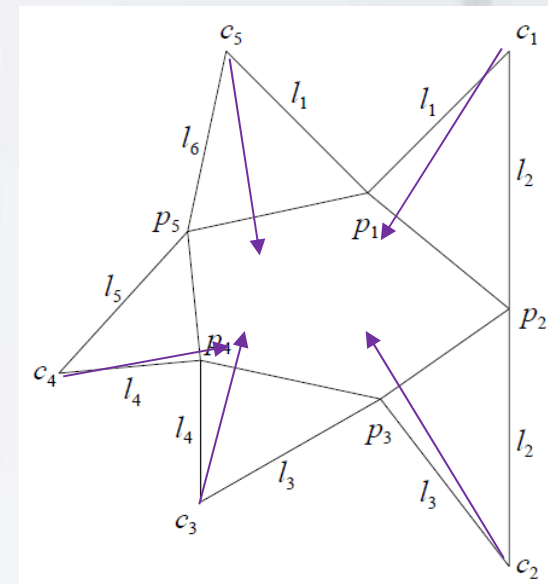
[定理] (ペタルが十分な長さがあるならば)

1. いつでも折れる
2. 折る手順(=ペタルの接着順序)を線形時間で計算できる。

[証明の核となるアイデア]

折る手順は Power Diagram

(一般化Voronoi図)で計算できる!

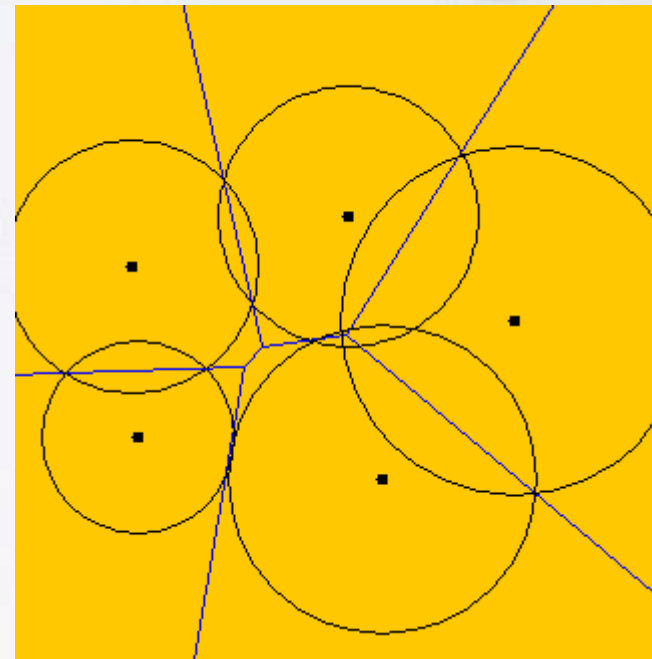
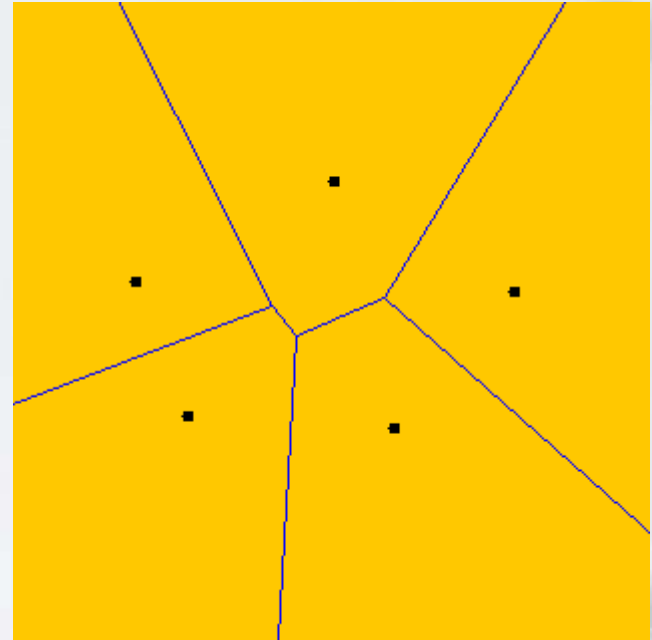


Power Diagram

- Voronoi図では
各点対間に垂直
2等分線を引く
- Power Diagram
では各頂点に
「重み」がある

細かいけど重要な注意: 点が凸に並んでいると、これらは「木」になり、閉路をもたない。

<http://pages.cpsc.ucalgary.ca/~laneb/Power/>



(一般化)ピラミッド問題:解(3)

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

問題2: ピラミッドにならない場合,

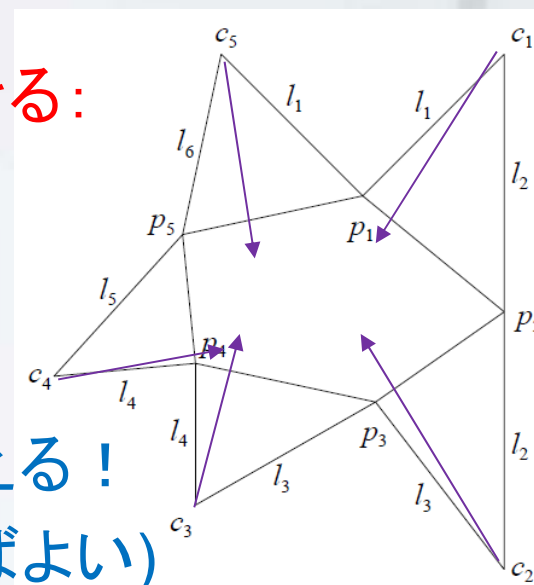
問題2-1: 凸多面体が折れるか?

[定理] 線形時間で折る手順を計算できる。

[証明の核となるアイデア]

折る手順は Power Diagram で計算できる:

1. 底面の点 p_i が「点」
2. 付随する長さ l_i が「重み」
3. Power Diagram の線が頂点 c_i と
接着後にできる新たな頂点の軌跡を与える!
(Power Diagram の「木」に沿って貼ればよい)



まとめと課題

(一般化)ピラミッド問題

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

問題1: ここから n 角錐(ピラミッド)が折れるか? **OK!**

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか? **Good!** $O(n^3)$??

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか? **So so (改善の余地?)**

メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

メタ²問題2: 二つの問題の解が同じになるのはどんなときか? **未解決問題**

底面が凸 n 角形
であることを使っ
てない

頂点が底面からはみ出さな
ければ凸が最大になりそうな
気がするけれど...