I238 計算の理論

上原 隆平

2019年I-1期（4-5月）

今日のアナウンス　Today's Announce

- レポートと試験の採点は終わりました(I've checked all reports and mid-term examinations)
  - 結果の返却はJ-storageでTomoko Taniguchiさんと共有(Your results will be shared with Ms. Tomoko Taniguchi using J-storage)
  - J-storageからのメールを受け取ったらチェックしてください (Check your results when you receive an email from J-storage).
- 午後，補講あり(Supplemental lecture on Tutorial Hour)
  - レポートと試験の解答と解説(Answers & Comments on Reports & Examination)
  - グラフの話（たぶん）(Maybe: Very introduction to graphs)

I238 Computation Theory

by

Prof. Ryuhei Uehara

Term I-1, April-May, 2019

計算量の理論

- ゴール1:
  - “計算可能な*関数/問題/言語/集合*”
    - 関数には2種類存在する;
      1. 計算不能(!)な関数
      2. 計算可能な関数
- ゴール2:
  - 「問題の困難さ」を示す方法を学ぶ
    - 計算可能な問題であっても、*手におえない*場合がある！
      - 計算に必要な資源(時間・領域)が多すぎるとき

Computational Complexity

- Goal 1:
  - *"Computable Function/Problem/Language/Set"*
    - We have two functions;
      1. Functions that are not computable!
      2. Functions that are computable.
- Goal 2:
  - How can you show *"Difficulty of Problem"*
    - There are *intractable* problems even if they are computable!
      - because they require too many resources (time/space)!

計算量の理論

- ゴール1:
  - “計算可能な*関数/問題/*
    - 関連する専門用語;
      計算可能性、対角線論法

グラフ理論/グラフの問題/グラフアルゴリズム
- グラフ理論超入門
  - 無向グラフ, 有向グラフ, 多重グラフ, 木構造、平面グラフ
- グラフ上の問題とアルゴリズム
  - 探索問題:オイラー閉路、最小全域木など

- ゴール2:
  - 「問題の困難さ」を示す方法を学ぶ
    - 関連する専門用語;
      クラスNP, P≠NP予想, NP困難性, 多項式時間還元

ところどころで
少しずつ...

Computational Complexity

- Goal 1:
  - *"Computable Function/Probler*
    - Technical terms;

      computability, diagonalization

Graph Theory/Graph Problems/ Graph Algorithms

- Introduction to Graph Theory
  - (Un)directed graph, multi-graph, tree, planar graph
- Graph problems and graph algorithms
  - Search Problems: Euler cycle, minimum spanning tree

They will be given one by one…

- Goal 2:
  - How can you show *"Difficulty of Problem"*
    - Technical terms;

      The class NP, P≠NP conjecture, NP-hardness, polynomial time reduction

6. 計算量の理論

6.0. 概要

- 「計算可能」

➔計算にどのくらいの資源(コスト)が必要か？

  – 計算量の理論

  1. 計算量の<u>上界</u>の研究
  2. 計算量の<u>下界</u>の研究
  3. 計算の困難性の階層構造の研究

6. Computational Complexity

6.0. Overview

- "Computable?"

➔ How much cost is required for computation?

  – Computational Complexity Theory

  1. Studies on <u>upper bound</u> of computational cost
  2. Studies on <u>lower bound</u> of computational cost
  3. Structural studies on hardness of computation

6.計算量の理論

6.0.1. 計算量の上界の研究

アルゴリズム論: 効率の良いアルゴリズムの設計

- アルゴリズム *A* が問題 *X* を大きさ *n* のどんな入力に対しても高々 $T(n)$ 時間で解けるとする.
- このとき, アルゴリズム A の時間計算量の上界は $T(n)$ である.

[最悪な場合の漸近的な時間計算量]

6. Computational Complexity

6.0.1. **Studies on upper bound of computational cost**

Algorithm Theory: design of efficient algorithms

- Suppose we have an algorithm A which solves a problem X in at most time $T(n)$ for any input of size n.
- Then, an upper bound on the time complexity of the algorithm A is $T(n)$.

  [asymptotic worst case time complexity]

6.計算量の理論

6.0.2. 計算量の下界の研究

問題*X*に対する**<u>どんな</u>**アルゴリズムも最悪の場合 *T*(*n*) 時間かかるとき，問題*X*の時間計算量の下界は *T*(*n*) である．

- P ≠NP 予想
- 暗号システムの頑健性

6.0.3. 計算の困難性の階層構造の研究

問題の困難性に関する概念「xx困難性」の階層構造の特徴付けを研究する

6. Computational Complexity

6.0.2. **Studies on lower bound of computational cost**

If *any* algorithm for a problem *X* takes time *T*(*n*) in the worst case, a lower bound on the time complexity of the problem *X* is *T*(*n*).

- P ≠NP conjecture
- Robustness of crypto system

6.0.3. **Structural studies on hardness of computation**

Studies to characterize hardness in the level of “*xx*-hardness” hierarchical structure depending on the hardness

6.計算量の理論

6.1. 計算時間の評価

6.1.1. チューリングマシンの時間計算量

定義6.1: どんな入力に対しても停止する(決定性)チューリングマシンを*M*とする. このとき*M*の**実行時間**または**時間計算量**は以下を満たす関数 f:N→N である:

f(n) は長さ*n*のすべての入力*x*に対する*M*(*x*)のステップ数の最大値

このとき,
- *M*の実行時間は *f(n)*時間
- *M*は*f(n)*時間チューリングマシンという

アルゴリズムを評価/比較するためにはさらなる道具が必要.

[注意]
- *f(n)* は長さ*n*の文字列すべてに対する最大値をとっている (最悪の場合の実行時間)
- 通常，*f(n)* は単調増加関数だが…?

6. Computational Complexity

6.1. Measuring Computation Time

6.1.1. Time complexity of a Turing machine

Definition 6.1:

Let *M* be a (deterministic) Turing machine that halts on all inputs.

The ***running time*** or ***time complexity*** of *M* is the function $f:\mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$ s.t.

$f(n)$ is the maximum number of steps of $M(x)$ for all x of length n

In the case,

- we say that *M* runs in time $f(n)$
- *M* is an $f(n)$ time Turing machine

We need further *tools* to estimate/compare algorithms

[Note]

- $f(n)$ takes the maximum for all strings of length n (worst case complexity)
- usually, $f(n)$ may be monotone increasing function, but…?

6.計算量の理論

5分テスト:
例1か例2のどれかを解け

6.1.計算時間の評価

6.1.2. O記法

定義6.2: 自然数上の関数 f と g に対し,
$\exists c, n_0 > 0, \forall n \geqq n_0 \, [f(n) \leqq c\, g(n)]$
が成立するなら, $f(n)$ は オーダー $g(n)$ の関数といい, $f(n) = O(g(n))$ と書く.

注意: 定数 c と n_0 はnとは独立に決められる必要がある.

例6.1: 自然数上の任意の関数 f, g, h に対して以下が成立:
1. $\forall n [\, f(n) \leqq g(n)] \rightarrow f(n) = O(g(n))$
2. $[\, f(n) = O(g) \text{ and } g(n) = O(h(n))] \rightarrow f(n) = O(h(n))$

例6.2: 以下を示せ:
1. $5n^3+4n^2+n=O(n^3)$
2. $5n^3+4n^2+n=O(n^4)$
3. $5n^3+4n^2+n \neq O(n^2)$

[コメント] $f(n) \in O(g(n))$ と書く人もいる

6. Computational Complexity

6.1. Measuring Computation Time

6.1.2. Big-O notation

Definition 6.2: For functions f and g on natural numbers, if
$\exists c, n_0 > 0, \forall n \geqq n_0 \, [f(n) \leqq c\, g(n)]$
then we say $f(n)$ is <u>in the order of $g(n)$</u> and denote it by $f(n) = O(g(n))$.

<u>Remark</u>: the constants c and n_0 must be determined <u>independently</u> of n.

Ex. 6.1: The followings hold for any functions f, g and h on natural numbers:

1. $\forall n[\, f(n) \leqq g(n)] \rightarrow f(n) = O(g(n))$
2. $[\, f(n) = O(g) \text{ and } g(n) = O(h(n))] \rightarrow f(n) = O(h(n))$

Ex. 6.2: Prove the following:

1. $5n^3+4n^2+n=O(n^3)$
2. $5n^3+4n^2+n=O(n^4)$
3. $5n^3+4n^2+n \neq O(n^2)$

[Comment] Some people write as $f(n) \in O(g(n))$

6.計算量の理論

6.1.計算時間の評価

6.1.2. O記法についての有用な定理

定理6.1: 自然数上の単調非減少関数 *f(n)* と *g(n)* に対し, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$ ならば *f(n)=O(g(n))*

証明: 略.

ロピタルの定理の概要:
自然数上の「自然な」関数 *f(n)* と *g(n)* に対し, $\lim_{n\to c}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to c}\frac{f'(n)}{g'(n)}$

詳細と証明: 略.

事実6.1: 自然数上の任意の多項式 p(n) と任意の実数 c>1 に対して $p(n)=O(c^n)$

事実6.2: 任意の自然数 k に対して $(\log n)^k=O(n)$

6. Computational Complexity

6.1. Measuring Computation Time

6.1.2. Useful Theorems about big-O notation

Theorem 6.1: For any non-increasing functions *f(n)* and *g(n)*, if $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$, we have *f(n)=O(g(n))*.

Proof: Omitted.

(A part of) l'Hôpital's rule:

For any "natural" functions *f(n)* and *g(n)* , we have $\lim_{n\to c}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to c}\frac{f'(n)}{g'(n)}$

Details and proof: Omitted.

Fact 6.1: $p(n)=O(c^n)$ for any polynomial p(n) and any real number c>1.

Fact 6.2: $(\log n)^k = O(n)$ for any natural number k.

6.計算量の理論

6.1.計算時間の評価

6.1.3. 問題の時間計算量

定義6.3: Φ を計算問題, $f(n)$ を自然数上の関数とする.
Φ を計算するプログラムA が $f(n)$ 時間で動作して以下を満たすとする.
$\exists c, n_0>0, \forall n \geqq n_0\ [f(n) \leqq c\, g(n)]$
このとき Φ は $O(g(n))$ 時間で計算可能, または Φの時間計算量は$O(g(n))$である.

注意: 定数 c と n_0 はn とは独立に決められる必要がある.

直観的には,
「問題 Φ が $f(n)$時間で計算可能」というとき,
- A の時間計算量は$f(n)$より小さいかもしれない
- A よりも速く Φ を計算するアルゴリズムがあるかもしれない

問題の複雑さに関する上界を与えているにすぎない

解析を改善できるかもしれない

より速いアルゴリズムが
見つかるかもしれない

6. Computational Complexity

6.1. Measuring Computation Time

6.1.3. Time complexity of a problem

Definition 6.3: Let Φ be a computing problem and $f(n)$ be a function over natural numbers. If we have a program A to compute Φ that runs in time $f(n)$ such that

$\exists c, n_0>0, \forall n \geqq n_0 \ [f(n) \leqq c\, g(n)]$

then we say that Φ is computable in $O(g(n))$ time, or time complexity of Φ is $O(g(n))$.

Remark: the constants c and n_0 must be determined independently of n.

Intuitively,

"problem Φ is computable within time $f(n)$" means

- time complexity of A may be less than $f(n)$.
- there may be a faster program to compute Φ than A does.

It only gives **an upper bound** of the complexity of the problem.

Our analysis may be improved

Better algorithm may be found

6.*. コラム：素数判定問題の歴史

PRIME
入力：自然数 n (2進数で表現)
質問: n は素数か？
PRIME $\equiv\{n : n$ は素数$\}=\{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\}$

スターリングの公式：

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```
program Naive(input n);
begin
  for each i:= 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.
```

2〜n-1までのすべての数で実際に割ってみる

$\log n \cdot \log i$ time

$O(l^6)$時間アルゴリズムが2002年に開発された!!

$$\text{実行時間} \leq \sum_{1<i<n} (c \log n \log i + d)$$
$$= c \log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)$$

自然数 n を表現した文字列の長さを l とすると， l はおおよそ $\log n$である.
したがって実行時間は $O(l^2 2^l)$ である.
よって PRIME の時間計算量は $O(l^2 2^l)$.である.

6.*. Column: A history of the PRIME problem

PRIME
Input : a natural number *n* (binary representation)
Question: Is *n* prime?
PRIME $\equiv$ {*n* : *n* is prime}={2,3,5,7,11,13,17,...}

Stirling's Formula :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```
program Naive(input n);
begin
  for each i:= 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.
```

try to divide by numbers between 2〜*n*-1

log *n*・log *i* time

$O(l^6)$ time algorithm was developed in 2002!!

running time $\leq \sum_{1<i<n} (c \log n \log i + d)$

$$= c \log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)$$

When the length of *n* is *l*, *l* is approximately log *n*. So, the running time is $O(l^2 2^l)$.
Thus, time complexity of PRIME is $O(l^2 2^l)$.

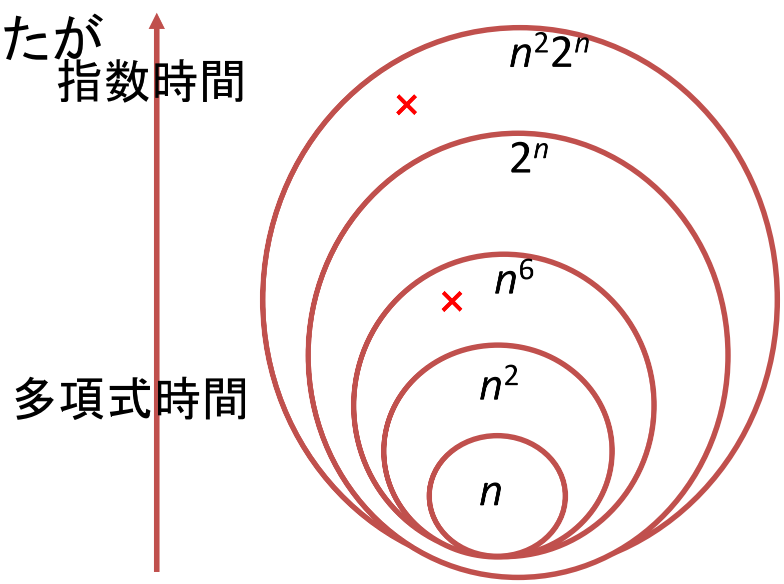
6.計算量の理論

6.1.計算時間の評価

6.1.3.問題の時間計算量

定義6.4: 自然数上の関数 $t(n)$ に対して，時間計算量 $O(t(n))$ の集合(認識問題)全体の集合を ***$O(t(n))$時間計算量クラス*** とよび，TIME($t(n)$) とかく．こうした関数 $t(n)$ は制限時間と呼ぶ．

例6.3: PRIME は TIME($n^2 2^n$) の要素であったが
今は TIME(n^6) の要素．



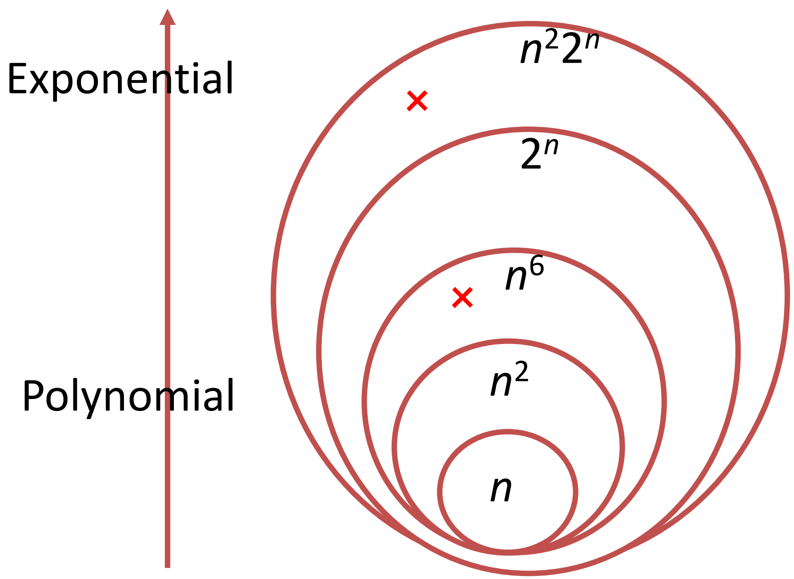
6. Computational Complexity

6.1. Time Complexity Classes

6.1.3. Time complexity of a problem

Definition 6.4: For a function $t(n)$ over natural numbers, the set of all sets (i.e. recognition problems) with time complexities $O(t(n))$ is called ***$O(t(n))$*-time complexity class**, and it is denoted by TIME($t(n)$). Such a function $t(n)$ is called a time limit.

Ex. 6.3: PRIME was in TIME($n^2 2^n$),
but now it is in TIME(n^6).



6.計算量の理論

6.1.計算時間の評価

6.1.3.問題の時間計算量

定義6.5: 自然数上の関数 $t(n)$ に対して，時間計算量 $O(t(n))$ の集合(認識問題)全体の集合を **$O(t(n))$時間計算量クラス** とよび，TIME($t(n)$) とかく．こうした関数 $t(n)$ は制限時間と呼ぶ．

6.2.代表的な計算量クラス

$$\mathrm{P} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(p(l))$$

$$\mathrm{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$$

$$\mathrm{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$$

C集合： 計算量クラスCに入る集合．
C問題： C集合の認識問題

ある問題がPに入っていないなら、
現実的には手に負えない…

6. Computational Complexity

6.1. Time Complexity Classes

6.1.3. Time complexity of a problem

Definition 6.5: For a function $t(n)$ over natural numbers, the set of all sets (i.e. recognition problems) with time complexities $O(t(n))$ is called ***O(t(n))*-time complexity class**, and it is denoted by $\mathrm{TIME}(t(n))$. Such a function $t(n)$ is called a time limit.

6.2. Representative time complexity classes

$$\mathrm{P} \equiv \bigcup_{p:\mathrm{polynomial}} \mathrm{TIME}(p(l))$$

$$\mathrm{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$$

$$\mathrm{EXP} \equiv \bigcup_{p:\mathrm{polynomial}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$$

C set : set in the complexity class C.

C problem : problem of recognizing a C set.

Problems not in P are intractable from the practical viewpoint…

例6.4: クラスP, E, EXPでは，多項式時間程度の違いは問題ではない．

P: 多項式 × 多項式→多項式

E: 2の線形乗 × 多項式 → 2の線形乗

EXP: 2の多項式乗 × 多項式 → 2の多項式乗

例6.5: PRIMEの計算量クラス

PRIME $\in$ TIME(2^l)

故に，PRIME $\in$ E

2002年の結果より，いまはPRIME$\in$P

定義6.6. T: 制限時間の集合

$\bigcup_{t \in T}$ TIME(t): T時間計算量クラス →これをTIME(T)と表す．

定理6.2: (1) P = $\cup_{c>0}$TIME(l^c), (2) EXP = $\cup_{c>0}$TIME(2^{l^c})

Ex.6.4: Polynomial makes no serious difference in the classes P, E, EXP.

P: polynomial $\times$ polynomial $\rightarrow$ polynomial

E: linear power of 2 $\times$ polynomial $\rightarrow$ linear power of 2

EXP: poly. power of 2 $\times$ poly. $\rightarrow$ poly. power of 2

Ex.6.5: Complexity class of PRIME

PRIME $\in$ TIME(2^{l})

Thus, PRIME $\in$ E

But by the result in 2002, PRIME $\in$ P now!!

Def.6.6: T: set of time limits

$\bigcup_{t \in T}$ TIME(t): T time complexity class

$\rightarrow$It is denoted by TIME(T).

Theorem 6.2: (1) P = $\cup_{c>0}$TIME(l^{c}), (2) EXP = $\cup_{c>0}$TIME($2^{l^{c}}$)

定理6.2: (1) P = $\bigcup_{c>0}$TIME(l^c), (2) EXP = $\bigcup_{c>0}$ TIME(2^{l^c})

証明: (2)の証明は省略.

T_1: l^cという形の多項式の集合.

T_2: 多項式の全体

→ $T_1 \subseteq T_2$ なので，TIME(T_1) ⊆ TIME(T_2)

p: 任意の多項式 (pはT$_2$の任意の要素)

多項式pの最大次数をkとすると，$p(l) = O(l^k)$

ここで、すべての制限時間 t_1, t_2 に対し、

t_1=O(t_2) ならば TIME(t_1)⊆TIME(t_2)

したがって

TIME($p(l)$) ⊆ TIME(l^k) ⊆ TIME(T_1)

よって TIME(T_1) ＝ TIME(T_2)

証明終

Theorem 6.2: (1) P = $\cup_{c>0}$TIME(l^c), (2) EXP = $\cup_{c>0}$ TIME(2^{l^c})

Proof: The proof of (2) is omitted.

T_1: set of polynomials of the form of l^c.

T_2: set of all polynomials

→ since $T_1 \subseteq T_2$, TIME(T_1) $\subseteq$ TIME(T_2)

p: arbitrary polynomial (*p* is any element of T_2)

if the maximum degree of a polynomial *p* is *k*, $p(l) = O(l^k)$

Now, for any times t_1, t_2,

$t_1 = O(t_2)$ implies TIME(t_1) $\subseteq$ TIME(t_2)

Therefore,

TIME($p(l)$) $\subseteq$ TIME(l^k) $\subseteq$ TIME(T_1)

Therefore, TIME(T_1) $=$ TIME(T_2)

Q.E.D.

6. 計算量の理論

6.2. 代表的な時間計算量クラス

6.2.2. 代表的な問題とその計算量

問題6.1: 命題論理式の評価 (PROP-EVAL)

入力 : $<F, < a_1, a_2, \ldots , a_n >>$

- F は拡張命題論理式
- $(a_1, a_2, \ldots , a_n)$ は F への真偽値割当て

質問 : $F(a_1, a_2, \ldots , a_n) = 1$?

(x,y)	$x \rightarrow y$ $(\neg x \vee y)$	$x \leftrightarrow y$ $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))$
(0,0)	1	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

6. Computational Complexity

6.2. Representative Time Complexity Classes

6.2.2. Representative problems and their complexity

Problem 6.1: Problem of evaluating propositional expression(PROP-EVAL)

Input : <F, < $a_1, a_2, \ldots, a_n$ >>

- F is an extended propositional expression
- ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) is a truth assignment to F

Question : $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$?

(x,y)	$x \rightarrow y$ $(\neg x \vee y)$	$x \leftrightarrow y$ $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))$
(0,0)	1	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

6.計算量の理論

6.2.代表的な時間計算量クラス

6.2.2.代表的な問題とその計算量

問題6.1: 命題論理式の評価(PROP-EVAL)

入力 : $<F, < a_1, a_2, \dots , a_n >>$

・F は拡張命題論理式

・$(a_1, a_2, \dots , a_n)$は F への真偽値割当て

質問 : $F(a_1, a_2, \dots , a_n) = 1$?

PROP-EVAL $\in$ P

F のコードから**計算木**を作る.

構築に必要な時間は $O(|F|^3)$.

ひとたび計算木ができると,

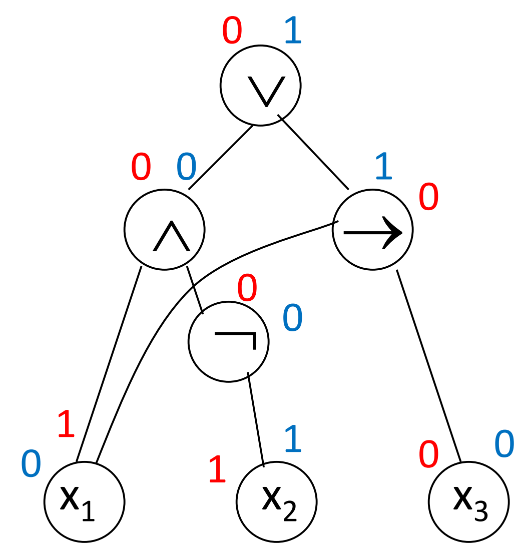
ボトムアップに計算すると

$F(a_1, a_2, \dots , a_n)$ の値は簡単に求まる.

$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

Ex. : $F(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$



計算木

6. Computational Complexity

6.2. Representative Time Complexity Classes

6.2.2. Representative problems and their complexity

Problem 6.1: Problem of evaluating propositional expression (PROP-EVAL)

Input : $<F, < a_1, a_2, \dots, a_n >>$

- F is an extended prop. expression
- $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ is a truth assignment to F

Question : $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$?

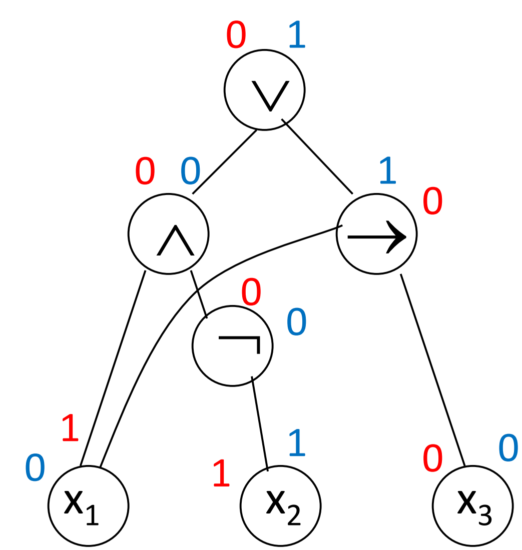
$\boxed{\text{PROP-EVAL} \in \text{P}}$

Construct a *computation tree* from a code of F.
It is built in time $O(|F|^3)$.
Once computation tree is built,
we can easily obtain the value
$F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ in a bottom-up fashion.

$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

Ex. : $F(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$



computation tree

6.計算量の理論

6.2.代表的な時間計算量クラス

6.2.2.代表的な問題とその計算量

問題6.2: 充足可能性 (SAT)

入力 : <F> F は 2-和積標準形

質問 : $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$とする真偽値割当てが存在するか？

和積標準形 (CNF)

$F = (\ \ \vee\ \ \vee \ldots \vee\ \ ) \wedge (\ \ \vee \ldots \vee\ \ ) \wedge \ldots \wedge (\ldots)$

- リテラルの∨の∧で表現される式

k SAT: 各項が k 個のリテラルを含む

ちょうど/たかだか

3SAT, 4SATも同様に定義できる.

SAT は任意の CNF を許す

ExSAT は拡張命題論理式（∨, ∧, →,↔）を許す

6. Computational Complexity

6.2. Representative Time Complexity Classes

6.2.2. Representative problems and their complexity

Problem 6.2: Satisfiability (SAT)

Input : $<F>$ F is 2-conjunctive normal form

Question : Is there any assignment such that $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$?

Conjunctive Normal Form (CNF)

$$F = (\bigcirc \vee \bigcirc \vee \dots \vee \bigcirc) \wedge (\bigcirc \vee \dots \vee \bigcirc) \wedge \dots \wedge (\dots)$$

- described by $\wedge$ of $\vee$ of literals.

k SAT: Each closure contains *k* literals

<u>exactly</u>/at most

We can define 3SAT, 4SAT similarly.

SAT consists of any CNF.

ExSAT consists of any extended propositional expression.

6.計算量

6.2.代表的な時間計算量

先に
グラフ理論/グラフの問題/グラフアルゴリズム
- グラフ理論超入門

をやります. . .

6.2.2.代表的な問題とその計算量

問題6.3: グラフの到達可能性問題 (ST-CON)
　入力 : $<G,s,t>$: 無向グラフ G, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$
　質問 : G は s から t への経路を持つか？

問題6.4: オイラー閉路問題 (EULER)
　入力 : $<G>$: 無向グラフ G
　質問 : G はオイラー閉路を持つか？

実際には,
有向/無向
閉路/パス
という違いは問題にならない

問題6.5: ハミルトン閉路問題 (DHAM)
　入力 : $<G>$: 有向グラフG
　質問 : G はハミルトン閉路を持つか？

- オイラー閉路とはすべての辺をちょうど一回通る閉路.
- ハミルトン閉路とはすべての頂点をちょうど一回通る閉路.

6. Computational Complexity

6.2. Representative Time Complexity Classes

6.2.2. Representative problems and their complexity

Problem 6.3: Graph reacheability problem (ST-CON)

Input : <G,s,t> : an undirected graph G, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$

Question : Does G have a path from s to t?

Problem 6.4: Euler cycle problem (EULER)

Input : <G>: a graph G

Question : Does G have an Euler cycle?

Actually, directed/undirected cycle/path do not matter

Problem 6.5: Hamiltonian cycle problem (DHAM)

Input : <G>: a directed graph G

Question : Does G have a Hamiltonian cycle?

- Euler cycle is a cycle that visits all edges once.
- Hamiltonian cycle is a cycle that visits all vertices once.

グラフアルゴリズムの例

問題6.4: オイラー閉路問題 (EULER)

入力: <*G*>: 無向グラフ *G*

質問: *G* はオイラー閉路を持つか？

定理6.3: 無向グラフGがオイラー閉路を持つ必要十分条件は，Gが連結で，すべての頂点の次数が偶数であること.

[証明] 略.

したがって，オイラー閉路問題は，非常に簡単に解ける.

Example of a graph algorithm

Problem 6.4: Euler cycle problem

Input : <G>: A graph G

Question : Does G have an Euler cycle?

Theorem 6.3: A graph G has an Euler cycle if and only if G is connected and every vertex has even degree.

[Proof] Omitted.

Therefore, the Euler cycle problem can be solved quite efficiently.

6. 計算量の理論

6.2.代表的な時間計算量クラス

6.2.2.代表的な問題とその計算量

以下は既知:

- 以下の問題は P の要素:
  - ✓PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, EULER
- 以下の問題は E の要素だが…
  - ✓3SAT, DHAM

P と E の間(?)にあるクラスNP

6. Computational Complexity

6.2. Representative Time Complexity Classes

6.2.2. Representative problems and their complexity

It is known that :

- The following problems are in P :
  - ✓ PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, EULER

- The following problems are in E, but…
  - ✓ 3SAT, DHAM

The class NP between P and E?