I238 Computation Thoery Report (1)

2019, Term 1-1
Ryuhei Uehara(Room I67b, `uehara@jaist.ac.jp`)

Propose(出題): May 7 (Tue)

Deadline(提出期限): May 14 (Tue), 10:50am.

Note(注意): レポートには氏名，学生番号，問題，解答を忘れずに書くこと．電子メールで PDF ファイルを送ってくれてもよい．メールで PDF ファイルを送るときは，メール本文に学生番号と氏名を明記し，添付ファイル名は「学生番号 (s は不要).pdf」とすること．また JAIST のアカウントからメールすること．Word ファイルは不可．締切は厳守．解答は日本語でも英語でもよい．(Do not forget to write your name, student ID, problems, and answers on your report. You can send your report by email in PDF file format. In the email, write your name with student ID in the body, and the name of attached file is “student ID(without s).pdf”. You should send it from JAIST account. The report in Word file format will not be accepted. Deadline is strict. You can answer in English or Japanese.)

以下の問題から 2 問選んで答えよ (各 10 点)．3 問以上答えたときは，良い方から採用する．(Answer two of the following problems (10pts). If you solve three or more, I will choose the best ones according to your score :-)

Problem 1: 文字列 $A = a_1a_2a_3 \cdots a_n$ と $B = b_1b_2b_3 \cdots b_m$ が与えられたとする。このとき、通常の辞書式順序と、長さ優先辞書式順序をそれぞれ形式的に定義せよ。つまり $A < B$ である必要十分条件をそれぞれ与えよ。ただし $a_i, b_j \in \Sigma = \{0, 1\}$ とし、文字に対しては $\epsilon < 0 < 1$ と定義されているとする。(Two strings $A = a_1a_2a_3 \cdots a_n$ and $B = b_1b_2b_3 \cdots b_m$ are given. Then give two formal definitions of the ordinary lexicographical ordering and the length-preferred lexicographical ordering. That is, give the necessary and sufficient conditions for $A < B$. Here, we assume that $a_i, b_j \in \Sigma = \{0, 1\}$ and $\epsilon < 0 < 1$ is already defined for letters.)

Problem 2: 2 回目の講義の中で「k テープチューリング機械 A は 1 テープチューリング機械 B で模倣できる」とした。このときに「k 個のテープヘッドを模倣するところが工夫が必要」と説明した。具体的な実現方法を考えて説明せよ。テープの長さつまりヘッドの位置には制限がないことに注意する。アルファベットは適宜増やしてよい。(In the second lecture, Uehara said that “a Turing machine A with k tapes can be simulated by a Turing machine B with one tape”. He also said that “we need some trick to simulate k tape heads”. Explain that trick. Note that the length of each tape is not limited. You can increase the number of alphabets if you need.)

Problem 3: $X_1, X_2, \ldots$ をチューリングマシンとし，$x_1, x_2, \ldots$ をそれらを符号化した 2 進文字列とする．(つまり x_i はチューリングマシン X_i を 2 進文字列で記述したものである．) X_i に 2 進文字列 x を与えたときの出力を $X_i(x)$ と書くことにする．二つの文字列 x と y に対し，これらの連接を $x \cdot y$ と書く（例えば $000 \cdot 111 = 000111$ である）．ここで次の関数 f を考える．

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot 1 \cdot X_i(x_i) & X_i \text{ に入力 } x = x_i \text{ を与えたら停止するとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この関数 f が計算不能であることを証明せよ．(Let $X_1, X_2, \ldots$ be the Turing machines, and $x_1, x_2, \ldots$ are the binary strings that encode the machines. (That is, a string x_i is the binary code of the Turing machine X_i.) We denote the output of X_i with a binary input x by $X_i(x)$.

For two strings x and y, their concatenation is denoted by $x \cdot y$ (e.g., $000 \cdot 111 = 000111$). Let f be the function defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot 1 \cdot X_i(x_i) & \text{if } X_i \text{ halts for the input } x = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Prove that this function f is not computable.)

Problem 4: 授業の中で「実数全体の集合 P は非可算である」という定理の証明を行った．このスライドの中の「実数」をすべて「有理数」で置き換えてみると，一見「有理数全体の集合 P' は非可算である」という定理の証明になる．しかし有理数は可算である．証明のどこが間違っているか，指摘せよ．そこから何が言えるか議論せよ。(In one slide of the lecture, we prove the theorem that claims "The set P of all real numbers is not countable." Now let replace every "real" by "rational". Then it seems that we prove the theorem that claims "The set P' of all rational numbers is not countable." But, the set of all rational numbers is countable. Point out where is wrong. Discuss what you can say from that point.)