

# I211 数理論理学

横山啓太

その2 (2020年10月22日)

**Q 5.** Aさん,Bさん,Cさんの3人がお互いについて話をしている. 正直者は必ず本当のことを言うが, 正直でないものの発言は本当か嘘か分からないとする.

- Aさん「BさんもCさんも正直者ではない」
- Bさん「3人のうち少なくとも一人は正直者だ」
- Cさん「Bさんが正直者なら私も正直者だ」

次の問いに答えよ.

1. 「Aさんが正直者である」を原始命題  $p$ , 「Bさんが正直者である」を原始命題  $q$ , 「Cさんが正直者である」を原始命題  $r$  で表すとき, 上の状況を命題論理の論理式で書け.
2. Aさん, Bさん, Cさんの中に正直者は最大何人いるか? 真理値表を書いて求めよ.

**Q 6.** 次の論理式の連言標準形、選言標準形を求めよ。

例  $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(r \vee s)$ .

1.  $\neg(p \wedge \neg(q \vee r))$ .
2.  $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow q \vee (r \wedge s))$ .
3.  $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s))$ .
4.  $\neg(p \wedge (\neg q \vee (\neg p \wedge r)))$ .

**定理 1.**

任意の論理式は連言標準形の論理式および選言標準形の論理式と論理的同値である.

**Q 7.** 定理 1 を次の手順で証明したい. そのために次の (†) が全ての論理式について成り立つことを論理式に現れる論理結合子の数に関する帰納法で示す.

(†) 論理式  $\varphi$  に対し  $\varphi$  と論理的同値な連言標準形の論理式  $\varphi^\wedge$ , 選言標準形  $\varphi^\vee$  が存在する.

このとき,

1. 論理結合子の数が 0 個の論理式について (†) が成り立つことを示せ.

論理結合子の数が  $n$  個以下の全ての論理式について (†) が成り立つとし,  $\varphi$  の論理結合子の数を  $n+1$  とする. このとき次を示せ.

例  $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$  のとき (†) が成り立つことを示せ.

2.  $\varphi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$  のとき (†) が成り立つことを示せ.
3.  $\varphi \equiv \psi_1 \rightarrow \psi_2$  のとき (†) が成り立つことを示せ.
4.  $\varphi \equiv \neg\psi$  のとき (†) が成り立つことを示せ.

以上により定理 1 の証明が完了した.

**Q 8.** 次の論理式を LK において証明せよ.

例  $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ .

1.  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ .
2.  $\neg\neg\neg p \rightarrow (q \vee \neg p)$ .
3.  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ .
4.  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ .
5.  $(\neg A \wedge A) \rightarrow B$ .
6.  $(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow A) \wedge (D \rightarrow B)$ .
7.  $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow D)$ .