

I211 数理論理学

横山啓太

その3 (2020年10月27日)

Q 9. 次の論理式がLKで証明できないことを示せ。

例 $p \vee q \rightarrow p \wedge \neg q$.

1. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.
2. $p \rightarrow (\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p \vee q))$.
3. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r \wedge s)$.

Q 10. 次は正しいか、正しいければ証明し、間違っていれば反例をあげよ。

1. 論理式 φ が充足可能であるとき $\neg\varphi$ は充足不可能である。
2. 論理式 φ, ψ が恒真であるとき $\varphi \wedge \psi$ は恒真である。
3. 論理式 φ, ψ が充足可能であるとき $\varphi \wedge \psi$ は充足可能である。
4. 論理式 φ, ψ が充足可能であるとき $\varphi \vee \psi$ は充足可能である。
5. 論理式 φ が充足可能、論理式 ψ が恒真であるとき $\varphi \rightarrow \psi$ は恒真である。
6. 論理式 φ が充足可能、論理式 ψ が恒真であるとき $\psi \rightarrow \varphi$ は充足可能である。

Q 11. LKの健全性定理の証明では、証明図に現れる各シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ に対し

(*) 任意の付値 v について

$$v(\bigwedge \Gamma) = t \implies v(\bigvee \Delta) = t$$

が成り立つことを証明図の構成に関する帰納法で示した。以下の各推論規則において、上段で(*)が成り立てば、下段でも(*)が成り立つことをそれぞれ確認せよ。

例 (\wedge L), (\wedge R) について確認せよ。

1. (\vee L), (\vee R) について確認せよ。
2. (cut) について確認せよ。
3. (\forall R) について確認せよ。
4. (\rightarrow L) について確認せよ。
5. (\neg L), (\neg R) について確認せよ。

Q 12. 次の論理式を LK において証明せよ。

1. $(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B)$.
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.
3. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B))$.
4. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
5. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$.

Q 13. 下図のような 3 行 3 列のミニ数独 (各マスに数字 1, 2, 3 を入れ同じ行・列に同じ数字が入らないようにする) を考える。

		1

「 i 行 j 列に入る数字が k である」を原始命題 p_{ijk} で表すとき、

1. 上の問題の解が満たすべき条件を連言標準形で表せ。
2. 上の問題の解が満たすべき条件を選言標準形で表せ。