I211 数理論理学

横山啓太

その 4 (2020 年 11 月 12 日)

Q 14. 1. 順序関係 $<$、等号 $=$ と定数 0 を用いて、以下の言明を表現する（述語論理の）論理式を書け。

(例) $<$ は (狭義) 全順序である。

(a) 0 が最小元である。

(b) 極小元が存在しない。

2. 1 項関係記号 $S(\cdot)$、等号 $=$ を用いて、以下の言明を表現する（述語論理の）論理式を書け。

(例) S を満たす元は高々2 個しか存在しない。

(a) S を満たす元は高々4 個の元しか存在しない。

(b) S を満たす元はちょうど 4 個存在する。

Q 15. $\mathcal{L} = (c; f(x); R(x))$ とする。論理式 ψ を次で与える。

$$\psi \equiv \forall x(f(c) = x \to ((x = y \to f(c) = y) \land (\forall z(y = c \lor y = f(x))))).$$

1. ψ の部分論理式を列挙し、それぞれの自由変数および束縛変数を指摘せよ。

2. 論理式 $\psi[f(f(c))/y]$ を具体的に書き下せ。

3. 論理式 $\psi[f(z)/y]$ を考えたい。そのまま代入を実行して良いか？

Q 16. $\mathcal{L} = (\times; \leq)$ とする。$(\mathbb{N}; \times; \leq)$、$(\mathbb{Z}; \times; \leq)$ 若しくは $(\mathbb{Q}; \times; \leq)$ での、以下の論理式の真理（真か偽）を答えよ。（ここでは $\times$ は二項関数の記号、$\leq$ は二項関係の記号であり、通常の積および「$\sim$ より大きくない」を表す順序として解釈される。）

1. $\forall x \forall y (x \leq y \lor y \leq x)$.

2. $\exists z \forall x (z \leq x)$.

3. $\forall x \forall y ((x \leq y \land \neg x = y) \to \exists z (x \leq z \land z \leq y \land \neg x = z \land \neg y = z))$.

4. $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \to x \times z \leq y \times z)$.

Q 17. $\mathcal{L} = (c; f(\cdot); S(\cdot))$ とする。以下の $\mathcal{L}$-論理式が充足可能であるかを答え、その理由を説明せよ。

(例) $\forall x (S(x) \leftrightarrow \neg S(f(x))) \land S(c)$.

(例) $\exists x S(x) \land \exists x \forall z (S(z) \to z = x) \land \forall x (S(x) \to S(f(x))) \land \forall x (\neg (x = f(x)))$.

1. $\forall x (f(x) = x) \land S(c) \land \neg S(f(c))$.

2. $\exists y \forall x f(x) = y \land \forall x (S(x) \to x = c) \land \neg S(f(c))$.

3. $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y) \land \forall x ((x = c) \leftrightarrow \neg S(x)) \land \forall x (S(x) \to \exists y (x = f(y)))$.

Q 18. $\mathcal{L}$ を言語、φ, ψ を $FV(\varphi) = FV(\psi) = \{x\}$ であるような $\mathcal{L}$-論理式とする。（真理の定義により）以下の $\mathcal{L}$-文が恒真であることを示せ。

(例) $\exists x (\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \exists x \varphi \lor \exists x \psi$.

1. $\forall x (\varphi \land \psi) \leftrightarrow \forall x \varphi \land \exists x \psi$.

2. $\forall x (\neg \varphi) \leftrightarrow \neg (\exists x \varphi)$.

Q 19. $\mathcal{L} = \{e; \cdot\}$ とし、G を群の理論とする。すなわち、G は以下の論理式の全称閉包から成る。

(i) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(ii) $x \cdot e = x \wedge e \cdot x = x$

(iii) $\exists y (y \cdot x = e \wedge x \cdot y = e)$

以下を示せ。

1. $\mathbb{Q}$ を有理数の集合、$\times_{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ 上の乗法とする。このとき $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; 1; \times_{\mathbb{Q}}) \models G$.
2. $G \models \exists y \forall x (x \cdot y = x)$.
3. $G \not\models \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$.

Q 20. $\mathcal{L} = \{<\}$ とし、T を順序の理論とする。すなわち、T は以下の論理式（の全称閉包）から成る。

(i) $\neg(x < x)$ (非反射律)

(ii) $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$ (推移律)

以下を示せ。

1. $T \models \forall x \forall y (x < y \rightarrow \neg(y = x \vee y < x))$.
2. $T \not\models \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$.
3. $T \cup \{\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)\}$
   $\models \forall x_1 \ldots \forall x_{100} \bigvee_{1 \leq i < j \leq 100} (x_i = x_j) \rightarrow \exists y \forall x (x < y \vee x = y)$.