I211 数理論理学

横山啓太

その 5 (2020 年 11 月 17 日)

Q 21. LK で以下が証明可能であることを示せ。

(例) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\psi$

1. $\exists x\psi \to \exists x(\varphi \vee \psi)$
2. $(\exists x\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$
3. $\neg\exists x\neg\varphi \to \forall x\varphi$

Q 22. $\mathcal{L} = (c; f(\cdot), g(\cdot); R(\cdot), S(\cdot))$ とする。LK で以下が証明可能であることを示せ。

(例) $\neg(f(c) = c) \to \exists x\exists y\neg(x = y)$

1. $\forall x(R(x) \to S(x)) \to (\exists yR(y) \to \exists yS(y))$
2. $\forall x(g(f(x)) = x) \to \forall x\forall y(f(x) = f(y) \to x = y)$
3. $\forall x(f(g(x)) = x) \to \forall x\exists y(x = f(y))$

（発展） 以上 2 と 3 の意味を確認し、なぜそれらが常に真かを説明せよ。

Q 23. 以下が恒真であることを示せ。

(例) $\forall x((A \wedge \neg A) \to B)$

1. $(\exists xA) \vee (\forall x\neg A)$
2. $\neg(\exists x(A \vee B)) \to \neg(\exists xA \vee \exists xB)$
3. $(\forall xA \to \exists yB) \to (\forall y\neg B \to \exists x\neg A)$

Q 24. $\mathcal{L} = (c; f(\cdot), g(\cdot); R(\cdot), S(\cdot))$ とする。以下が恒真であることを示せ。

(例) $\forall x(x = c \to R(f(x))) \to R(f(c))$

1. $\forall x(R(x) \to S(f(x))) \to (\exists x R(x) \to \exists y S(y))$
2. $\forall x \forall y(f(x) = g(y)) \to \forall x(f(x) = g(c))$
3. $(\exists x S(x) \land \neg S(c)) \to \exists x \exists y(\neg x = y)$

Q 25. $\mathcal{L} = \{e; \cdot\}$ とし、G を群の理論とする。以下を証明せよ。

1. $G \vdash \forall x \forall y \forall z((y \cdot x = e \land z \cdot x = e) \to y = z)$
2. $G \vdash \forall x \forall y(y \cdot x = e \to x \cdot y = e)$

Q 26 (発展)**.** $\mathcal{L} = (0, 1; +, \times)$ とする。ロビンソン算術 Q は以下から成る。

1. $\neg(x + 1 = 0)$
2. $(x + 1 = y + 1) \to (x = y)$
3. $(y = 0) \lor \exists x(x + 1 = y)$
4. $x + 0 = x$
5. $x + (y + 1) = (x + y) + 1$
6. $x \times 0 = 0$
7. $x \times (y + 1) = (x \times y) + x$

ペアノ算術 PA は次のように定義される。

$$\mathrm{PA} = \mathrm{Q} \cup \{(\varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))) \to \forall x \varphi(x) : \varphi \text{ は } \mathcal{L}\text{-論理式}\}.$$

ただし n は項 $((\ldots\overbrace{(1+1)+1)\cdots+1}^{n})$ の省略とする。以下を証明せよ。

(例) $\mathrm{Q} \vdash 2 + 3 = 5$

1. $\mathrm{Q} \vdash x \times 2 = x + x$
2. $\mathrm{PA} \vdash \forall x \forall y(x + y = y + x)$