I211 数理論理学

横山啓太

その6 (2020年11月?)

Q 27. $\mathcal{L} = \{c; f(\cdot)\}$ とする。以下について証明および反証が可能かどうかを答え、その理由を説明せよ。

1. $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y) \land \forall x (\neg f(x) = c)$.
2. $\exists x \exists y \exists z (\neg x = y \land f(z) = x \land f(z) = y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z (x = y \lor y = z \lor x = z) \to (\exists x \exists y \neg (f(x) = f(y)) \to \forall x \exists y f(y) = x)$.

Q 28. $\mathcal{L}$ を言語、Γ を有限な $\mathcal{L}$-理論、φ を $\mathcal{L}$-文とする。以下を示せ。

> $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ から $\forall x \neg(x = x)$ が証明できることと Γ から φ が証明できることは同値である。

Q 29. 健全性定理のためには、以下を LK の証明図の高さに関する帰納法で確かめる必要がある。

(∗) $FV(\Gamma) \cup FV(\Delta) = \vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ と仮定する。すると、任意の $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M} = (M; \dots)$ と任意の $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \bar{M}$ について

$$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}] \Longrightarrow \mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}].$$

言い換えれば、

(i) (∗) が始式について成り立つ。

(ii) 各推論規則について、もし (∗) が上式で成り立てば、(∗) は下式でも成り立つ。.

以下について回答せよ。

(例) (cut), (¬R) の推論規則が (ii) を満たすことを示せ。

(例) (∃L) の推論規則が (ii) を満たすことを示せ。

1. 等号についての始式が条件 $(*)$ を満たすことを示せ。
2. (∧R), (∨L) の推論規則が (ii) を満たすことを示せ。
3. (∃R) の推論規則が (ii) を満たすことを示せ。

Q 30. φ を p のみを命題変数に持つ命題論理の恒真な論理式とし、ψ を述語論理の論理式とする。このとき $\varphi[\psi/p]$ は述語論理の論理式で有り、さらにその全称閉包は恒真であることを示せ。

Q 31. 前問を φ に含まれる命題変数が $p_1, \ldots, p_n$ である場合に拡張せよ。

Q 32. $\mathcal{L} = \{c; R(x), S(x)\}$ とする。以下が LK で証明可能であることを示せ。

1. $\exists x(R(x) \to \forall y R(y))$.
2. $\exists x((R(c) \to \exists y S(y)) \to (\forall z(R(z) \to \neg S(z)) \to \neg R(x)))$.