I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 1 回: 命題論理の論理式

命題論理

命題論理とは...

- 命題: 真偽の定まる文
- 命題を「基本命題 (atomic proposition)」とその間の論理結合 (logical connective) に分けて分析
    - 原始命題/命題変数: $p, q, r, \ldots$
    - 論理積, conjunction (かつ): $\wedge$
    - 論理和, disjunction (または): $\vee$
    - 含意, implication (ならば): $\rightarrow$
    - 否定, negation (でない): $\neg$

Example

p: 雨が降っている, q: 傘を持っている
とするとき次はどんな主張?

- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$
- $(p \vee \neg p) \rightarrow q$

命題論理の論理式と意味論のキーワード

- 論理式の定義
- 命題論理の意味論: 真理値表
- 恒真命題、トートロジー
- 論理式の同値性
- 充足可能性
- 充足関係 $\models$
- 選言標準形と連言標準形

命題論理の論理式

定義 (命題論理の言語)

命題論理の言語は次よりなる．

- 原始命題/命題変数: $p, q, r, \ldots$
- 命題定数: $\top, \bot$
- 論理積, conjunction (かつ): $\wedge$
- 論理和, disjunction (または): $\vee$
- 含意, implication (ならば): $\rightarrow$
- 否定, negation (でない): $\neg$

他に必要に応じて括弧 (,) を用いる．
(命題定数は用いないこともある．)

命題論理の論理式は命題論理の言語 (記号) の所定の形の有限列として与えられる．

命題論理の論理式

定義 (論理式)

次により与えられる命題論理の言語の記号列を命題論理の論理式という．

- 原子命題および命題定数は論理式である．(特に原子論理式とも呼ばれる．)
- φ, ψ が論理式であるとき，$\neg(\varphi), (\varphi) \wedge (\psi), (\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \to (\psi)$ は論理式である．

また，原始論理式とその否定を合わせてリテラルという．

命題論理の論理式は $\varphi, \psi, \eta, \theta, \ldots$ や $A, B, C, \ldots$ で表すことが多い．補足として，次のルールにより論理式の記述をやや簡略化する．

- $(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$ を $((\varphi) \to (\psi)) \wedge ((\psi) \to (\varphi))$ の略記として用いる．
- 論理結合子は $\{\neg\}, \{\wedge, \vee\}, \{\to, \leftrightarrow\}$ の順で優先的に適用するとし，それに応じて混乱の無い範囲で括弧を省略する．

論理式の代入

定義 (代入)

論理式 φ に現れる全ての原始命題 p を論理式 ψ で置き換えた論理式を $\varphi[\psi/p]$ で表す.
(注意: ここでは p や ψ を単なる記号/記号列と見ている.)

定理

φ, ψ が論理式であるとき $\varphi[\psi/p]$ は論理式である.

(証明) 論理式に現れる論理結合子の数に関する帰納法による.
$m(\varphi)$ で φ に現れる論理結合子の数を表すとする.

- $m(\varphi) = 0$ のとき
  - $\varphi \equiv p$ のとき: $\varphi[\psi/p] \equiv \psi$, よってこれは論理式
  - $\varphi \not\equiv p$ のとき: $\varphi[\psi/p] \equiv \varphi$, よってこれは論理式
- $m(\varphi) = n + 1$ のとき
  ($m(\varphi) \leq n$ のとき $\varphi[\psi/p]$ は論理式と仮定)
  - $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ のとき: $\varphi[\psi/p] \equiv (\varphi_1[\psi/p]) \wedge (\varphi_2[\psi/p])$
    帰納法の仮定より $\varphi_i[\psi/p]$ は論理式, よって $\varphi[\psi/p]$ も論理式
  - $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi \equiv \varphi_1 \to \varphi_2, \varphi \equiv \neg\varphi_1$ のときも同様

論理式の代入

定義 (代入)

論理式 φ に現れる全ての原始命題 p を論理式 ψ で置き換えた論理式を $\varphi[\psi/p]$ で表す.
(注意: ここでは p や ψ を単なる記号/記号列と見ている.)

定理

φ, ψ が論理式であるとき $\varphi[\psi/p]$ は論理式である.

(証明) 論理式に現れる論理結合子の数に関する帰納法による.
$m(\varphi)$ で φ に現れる論理結合子の数を表すとする.

- $m(\varphi) = 0$ のとき
  - $\varphi \equiv p$ のとき: $\varphi[\psi/p] \equiv \psi$, よってこれは論理式
  - $\varphi \not\equiv p$ のとき: $\varphi[\psi/p] \equiv \varphi$, よってこれは論理式
- $m(\varphi) = n + 1$ のとき
  ($m(\varphi) \leq n$ のとき $\varphi[\psi/p]$ は論理式と仮定)
  - $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ のとき: $\varphi[\psi/p] \equiv (\varphi_1[\psi/p]) \wedge (\varphi_2[\psi/p])$
    帰納法の仮定より $\varphi_i[\psi/p]$ は論理式, よって $\varphi[\psi/p]$ も論理式
  - $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi \equiv \varphi_1 \rightarrow \varphi_2, \varphi \equiv \neg\varphi_1$ のときも同様

部分論理式

定義 (部分論理式)

φ を論理式とする．このとき φ の部分論理式を次で定める．

- φ は φ の部分論理式である．
- ψ が φ の部分論理式であり，
  さらに $\psi \equiv (\theta_1) * (\theta_2)$ の形 (ただし $*$ は $\wedge, \vee, \rightarrow$ のいずれか)
  であるとき θ_1, θ_2 は φ の部分論理式である．
- ψ が φ の部分論理式であり，
  さらに $\psi \equiv \neg(\theta)$ のとき θ は φ の部分論理式である．

Example

$(p \rightarrow q) \wedge (q \vee r)$ の部分論理式は次の 6 つ．

- $(p \rightarrow q) \wedge (q \vee r)$
- $p \rightarrow q, q \vee r$
- p, q, r