# I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 10 回：述語論理の完全性定理

# LK の完全性定理

命題論理のときと同様に，次の完全性定理が成り立つ．

**定理 (完全性定理 completeness theorem)**

$\mathcal{L}$-理論 $\Gamma$ と $\mathcal{L}$-文 $\varphi$ に対して

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \varphi.$$

すなわち，次の二つが成り立つ．

1. 健全性定理 *soundness theorem:*
   $\Gamma \vdash \varphi$ が *LK* で証明可能ならば $\Gamma \models \varphi$.
2. 完全性定理 *completeness theorem:*
   $\Gamma \models \varphi$ ならば $\Gamma \vdash \varphi$ が *LK* で証明可能.

**系 (完全性定理)**

$\mathcal{L}$-文 $\varphi$ について次は同値である．

1. $\varphi$ は *LK* で証明可能である．
2. $\varphi$ は恒真である．

# LK の完全性定理（別表現）

命題論理のときと同様に，次の補題も成り立つ．

**補題**

$\mathcal{L}$-理論と $\mathcal{L}$-文に対して次が成り立つ．

1. $\Gamma, \neg\varphi$ が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$.
2. $\Gamma, \varphi$ が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$.
3. $\Gamma$ が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ かつ $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

これを用いて，完全性定理は次の形でも表現できる．

**定理 (完全性定理の別表現)**

$\mathcal{L}$-理論 $\Gamma$ について

$$\Gamma \text{ は無矛盾} \Leftrightarrow \Gamma \text{ は充足可能（モデルを持つ）}.$$

# コンパクト性定理

**定理 (完全性定理の別表現，再掲)**

$\mathcal{L}$-理論 $\Gamma$ について

$$\Gamma \text{ は無矛盾} \Leftrightarrow \Gamma \text{ は充足可能（モデルを持つ）.}$$

無矛盾性の定義と証明の有限性から，

$$\Gamma \text{ は無矛盾} \Leftrightarrow \Gamma \text{ の任意有限部分集合は無矛盾.}$$

が成り立つことに注意すると，完全性定理の別表現は次のように言い換えられる．

**定理 (コンパクト性定理)**

$\mathcal{L}$-理論 $\Gamma$ について

$$\Gamma \text{ は充足可能} \Leftrightarrow \Gamma \text{ の任意有限部分集合は充足可能.}$$

# コンパクト性定理の応用

### コンパクト性定理の特徴

- 完全性定理の単純な帰結だが，LK の証明可能性について一切言及がない．
- 数理論理学，特にモデル理論の根幹をなす定理である．
- 応用は数理論理学全般において多岐にわたる．

次の**自然数論の超準モデル**とよばれるものの存在は，コンパクト性定理を応用する典型例．

### 定理 (自然数論の超準モデル)

$\mathcal{L}_1 = \{0, 1; +, \cdot; \leq\}$ とし，$\mathbb{N}$ を $\mathcal{L}_1$-構造

$$\mathbb{N} = (\mathbb{N}; 0, 1; +, \cdot; \leq)$$

とみなす．このとき，$\mathcal{L}_1$-構造 $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ で $\mathbb{N}$ と同型でないものが存在する．
(ここで $\mathrm{Th}(\mathbb{N}) = \{\psi \mid \mathbb{N} \models \psi, \psi$ は $\mathcal{L}_1$-文 $\}$.)