

I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 11 回：完全性定理の証明 (述語論理)

定理 (完全性定理 completeness theorem)

\mathcal{L} -理論 Γ と \mathcal{L} -文 φ に対して

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \varphi.$$

すなわち、次の二つが成り立つ。

- 1 健全性定理 *soundness theorem*:
 $\Gamma \vdash \varphi$ が LK で証明可能ならば $\Gamma \models \varphi$.
- 2 完全性定理 *completeness theorem*:
 $\Gamma \models \varphi$ ならば $\Gamma \vdash \varphi$ が LK で証明可能.

① 健全性定理の証明

② 完全性定理の証明[†]

① 健全性定理の証明

② 完全性定理の証明[†]

定理 (健全性定理)

\mathcal{L} -理論 Γ と \mathcal{L} -文 φ に対して

$$\Gamma \vdash_{LK} \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi.$$

(証明の方針)

- Γ が有限の場合について示せば十分.
- 証明図の構成に関する帰納法.
- ただし, 自由変数の扱いに注意が必要.
(バラバラに全称閉包をとってはいけない.)

具体的には, 証明図の終式で

(*) Γ, Δ に現れる自由変数を $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ とする. このとき, 任意の \mathcal{L} -構造 $\mathcal{M} = (M; \dots)$ と任意の $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in M$ について

$$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}] \Rightarrow \mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$$

が成り立つことを証明図の構成に関する帰納法で示す.

(証明)

言語 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}; \mathcal{F}; \mathcal{R})$ を一つ固定する.

π を $\Gamma \vdash \Delta$ を終式とする証明図とする. このとき以下が成り立つことを証明図の構成に関する帰納法で示す.

- (*) Γ, Δ に現れる自由変数を $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ とする. このとき任意の \mathcal{L} -構造 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}; \dots)$ と任意の $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathcal{M}$ について

$$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}] \implies \mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}].$$

まず π が始式のみからなる証明図であるとき,

- $\varphi \vdash \varphi$ の形の始式で (*) が成り立つことは自明.

等号に関する始式

$$\vdash t = t$$

$$t = s \vdash s = t$$

$$t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$$

$$t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n \vdash f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n)$$

$$t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n, R(t_1, \dots, t_n) \vdash R(s_1, \dots, s_n)$$

(t, s, \dots は \mathcal{L} -項, f は n 変数関数記号, R は n 項関係記号)

- 等号に関する始式で (*) が成り立つことは等号の性質 (反射性, 対称性, 推移性等) から分かる.

次に π の終式がいずれかの推論規則の下式になっているとき,

- 構造規則のときは命題論理の時とほぼ同様に証明できる. (演習問題)
- 論理結合子の規則のときも命題論理の時とほぼ同様に証明できる. (演習問題)

量化記号の規則

$$\frac{\varphi[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x \varphi, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\forall L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[y/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} \quad (\forall R)$$

(†) ただし $\Gamma, \Delta, \forall x \varphi$ は
 y を自由変数に持たない

$$\frac{\varphi[y/x], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x \varphi, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\exists L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi} \quad (\exists R)$$

(†) ただし $\Gamma, \Delta, \exists x \varphi$ は
 y を自由変数に持たない

- 量化記号に関する規則の場合を示す.

($\forall R$) のとき

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A[z/y]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall y A} (\forall R)$$

ただし $\Gamma, \Delta, \forall y A$ は z を自由変数に持たない。

$\Gamma \vdash A[z/y], \Delta$ について (*) が成り立ち、 z は Γ, Δ に現れない自由変数とする。

このとき $\Gamma \vdash \forall y A, \Delta$ について (*) が成り立つことを示せば良い。
 $\Gamma, A[z/y] \Delta$ に現れる z 以外の自由変数を \vec{x} とし、 $\mathcal{M} = (M; \dots)$ と $\vec{a} \in M$ を任意に取る。

今、 $\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}]$ とすると、任意の $b \in M$ について

「 $\mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$ 」であるか「 $\mathcal{M} \models A[z/y][\vec{a}/\vec{x}, b/z]$ 」である。

前者は b と無関係なので、これは「 $\mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$ 」であるか

「任意の $\bar{b} \in M$ について $\mathcal{M} \models A[z/y][\vec{a}/\vec{x}, \bar{b}/z]$ 」である。

特に後者の場合、「任意の $\bar{b} \in M$ について $\mathcal{M} \models A[\vec{a}/\vec{x}][\bar{b}/z]$ 」すなわち $\mathcal{M} \models \forall y A[\vec{a}/\vec{x}]$ である。

よって、いずれの場合にも $\mathcal{M} \models \forall y A[\vec{a}/\vec{x}] \vee \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$ を得る。

($\forall L$) のとき

$$\frac{A[t/y], \Gamma \vdash \Delta}{\forall y A, \Gamma \vdash \Delta} (\forall L)$$

$\Gamma, A[t/y] \vdash \Delta$ について (*) が成り立つとする。

このとき $\Gamma, \forall y A \vdash \Delta$ について (*) が成り立つことを示せば良い。

$\Gamma, A[t/y], \Delta$ に現れる自由変数を \vec{x} とし, $\mathcal{M} = (M; \dots)$ と $\vec{a} \in M$ を任意に取る。

今, $\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}] \wedge (\forall y A[\vec{a}/\vec{x}])$ とすると, 特に任意の $b \in M$ について $\mathcal{M} \models A[\vec{a}/\vec{x}][b/y]$ である。

上記は特に $b = (t[\vec{a}/\vec{x}])^M$ についても成り立つ。

よって $\mathcal{M} \models A[t/y][\vec{a}/\vec{x}]$ である。

以上より, $\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}] \wedge (A[t/y][\vec{a}/\vec{x}])$ であるので $\Gamma, A[t/y] \vdash \Delta$ について (*) が成り立つことより $\mathcal{M} \models \forall \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$ を得る。

($\exists L$), ($\exists R$) の場合も同様に証明できる。(演習問題)

(証明終)

完全性定理の証明

① 健全性定理の証明

② 完全性定理の証明[†]

完全性定理, カット除去定理

以下, 言語 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ を一つ固定し, (必要なら \mathcal{C} に定数記号を付加することにより) \mathcal{L} は定数記号を少なくとも一つ含むこととする.

述語論理の LK でも命題論理のときと同様に次が成り立つ.

定理 (完全性定理, カット除去定理)

Γ を \mathcal{L} -文の集合, φ を \mathcal{L} -文とする. このとき次は同値.

- 1 φ が Γ から LK-(cut) で証明可能.
- 2 φ が Γ から LK で証明可能.
- 3 $\Gamma \models \varphi$.

1 \rightarrow 2 は自明, 2 \rightarrow 3 は健全性定理であるので, 3 \rightarrow 1 を示せば良い.

3 \rightarrow 1 の対偶をつぎの一般的な形で示す.

- (†) Γ_0, Δ_0 を \mathcal{L} -文の集合で, 任意の有限列の組 $\Gamma' \subseteq \Gamma_0, \Delta' \subseteq \Delta_0$ についてシーケント $\Gamma' \vdash \Delta'$ が LK-(cut) で証明できないとする. このとき $M \models \Gamma_0 \cup \neg\Delta_0$ なる \mathcal{L} -構造 M が存在する.
(ここで $\neg\Delta_0 = \{\neg\psi \mid \psi \in \Delta_0\}$.)

完全性定理の証明の概要

所望の \mathcal{L} -構造 M を命題論理のときと同様に証明探索によって構成したい. すなわち, $(\Gamma_0, \Delta_0$ が有限なとき)

- $\Gamma_0 \vdash \Delta_0$ に LK の (構造規則以外の) 推論規則を逆向きに繰り返し適用 (分解) し,
- それ以上分解が行えない極大な $\bar{\Gamma} \supseteq \Gamma_0, \bar{\Delta} \supseteq \Delta_0$ を得たい.

しかし, 命題論理のときと異なり

- $(\exists L), (\exists R), (\forall L), (\forall R)$ は同じ論理式に複数回適用可能,
- $\Gamma_0 \cup \Delta_0$ の部分論理式は一般に無限に存在する,

ため, 極大な $\bar{\Gamma} \supseteq \Gamma_0, \bar{\Delta} \supseteq \Delta_0$ を得るためには無限個の論理式の“上手い” (数学的な) 扱いが必要になる.

※ 講義ノートの証明ではこの部分を解決するために「ツォルンの補題」を用いている.

(以下簡単のため, $\Gamma_0 \cup \Delta_0$ が等号を含まない場合のみを考える.)

上手く極大な $\bar{\Gamma} \supseteq \Gamma_0$, $\bar{\Delta} \supseteq \Delta_0$ を構成して以下を満たすようにすることができる.

- $FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}) \cap BV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}) = \emptyset$
- $\varphi \wedge \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi, \psi \in \bar{\Gamma}$ (($\wedge L$) に対応)
- $\varphi \vee \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ または $\psi \in \bar{\Gamma}$ (($\vee L$) に対応)
- $\varphi \rightarrow \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\psi \in \bar{\Gamma}$ または $\varphi \in \bar{\Delta}$ (($\rightarrow L$) に対応)
- $\neg\varphi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi \in \bar{\Delta}$ (($\neg L$) に対応)
- $\varphi \wedge \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Delta}$ または $\psi \in \bar{\Delta}$ (($\wedge R$) に対応)
- $\varphi \vee \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi, \psi \in \bar{\Delta}$ (($\vee R'$) に対応)
- $\varphi \rightarrow \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ かつ $\psi \in \bar{\Delta}$ (($\rightarrow R$) に対応)
- $\neg\varphi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ (($\neg R$) に対応)
- $\forall x\theta \in \bar{\Gamma}$ かつ t が $FV(t) \subseteq FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ をみたす \mathcal{L} -項であれば
 $\theta[t/x] \in \bar{\Gamma}$ (($\forall L$) に対応)
- $\exists x\theta \in \bar{\Gamma}$ ならば ある $z \in FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ が存在して $\theta[z/x] \in \bar{\Gamma}$
(($\exists L$) に対応)
- $\forall x\theta \in \bar{\Delta}$ ならば ある $z \in FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ が存在して $\theta[z/x] \in \bar{\Delta}$
(($\forall R$) に対応)
- $\exists x\theta \in \bar{\Delta}$ かつ t が $FV(t) \subseteq FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ をみたす \mathcal{L} -項であれば
 $\theta[t/x] \in \bar{\Delta}$ (($\exists R$) に対応)

完全性定理の証明の概要

$FV(t) \subseteq FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ なる \mathcal{L} -項全体の集合を \mathcal{T}_0 とする。
 \mathcal{T}_0 上の解釈 v を以下で定める。

- $c \in C$ に対し $v(c) = c \in \mathcal{T}_0$,
- n 変数関数記号 $f \in \mathcal{F}$ と $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_0$ に対し
 $v(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}_0$,
- n 項関係記号 $R \in \mathcal{R}$ と $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_0$ に対し
 $(t_1, \dots, t_n) \in v(R) \Leftrightarrow R(t_1, \dots, t_n) \in \bar{\Gamma}$.

\mathcal{L} -構造 M を $M = (\mathcal{T}_0, v)$ と定める。すると

- $\bar{\Gamma}, \bar{\Delta}$ に含まれる \mathcal{L} -論理式は全て $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_0}$ -文とみなせる。
 - $FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ に含まれる変数はそのまま \mathcal{T}_0 の元とみなす。
- $\bar{\Gamma}, \bar{\Delta}$ の性質から ($\mathcal{L}_{\mathcal{T}_0}$ -文の構成に関する帰納法により)
 - 任意の $\psi \in \bar{\Gamma}$ について $M \models \psi$, かつ
 - 任意の $\psi \in \bar{\Delta}$ について $M \not\models \psi$ が得られる。
- よって $M \models \bar{\Gamma} \cup \neg \bar{\Delta}$ であることが確かめられる。

以上より $M \models \Gamma_0 \cup \neg \Delta_0$ である。

完全性定理, カット除去定理

定理 (完全性定理, カット除去定理)

Γ を \mathcal{L} -文の集合、 φ を \mathcal{L} -文とする。このとき次は同値。

- 1 φ が Γ から LK -(cut) で証明可能.
- 2 φ が Γ から LK で証明可能.
- 3 $\Gamma \vdash \varphi$.

命題論理のときと同様にカット除去定理より次も分かる。

定理 (部分論理式性 subformula property)

シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能であれば、 $\Gamma \vdash \Delta$ の証明図で Γ, Δ に含まれる論理式の部分論理式しか含まないものが存在する。

- ただしここでの部分論理式は“広義の部分論理式”すなわち現れる変数記号に任意の \mathcal{L} -項を代入したものを含む。
- よって部分論理式は一般に無限に存在することに注意。

述語論理の LK の場合においても命題論理のときと同様に「証明探索」を行うことはできる。

特に \mathcal{L} -文 φ が恒真であれば,

- シーケント $\vdash \varphi$ に推論規則を逆向きに適用 (分解) し証明を探索
- 探索の際に現れるのは φ の部分論理式のみ
- 論理結合子の規則 $> (\exists L), (\forall R) > (\forall L), (\exists R)$ の優先順に分解
- $(\exists L), (\forall R)$ の分解を行う際は新しい変数を選べば良い
- $(\forall L), (\exists R)$ の分解を行う際は \mathcal{L} -項を“上手く”選ぶ

ことにより φ の証明が探索できる。

述語論理の非決定性

しかし, 一般に \mathcal{L} -文 φ が恒真かどうか分からないとき, 証明の探索を行う際に $(\forall \mathcal{L}), (\exists \mathcal{R})$ の分解において \mathcal{L} -項を“上手く”選ぶことが出来るか判定する術がない.

定理 (述語論理の決定不能性)

\mathcal{L} -文 φ が恒真/証明可能かどうかを判定問題は決定不能である.

すなわち, 与えられた \mathcal{L} -文 φ が恒真かどうかを判定するようなアルゴリズムは存在しない.

またこのことから次も分かる.

定理 (充足判定の決定不能性)

\mathcal{L} -文 φ が充足可能かを判定する問題は決定不能である.

- $(\forall \mathcal{L}), (\exists \mathcal{R})$ の分解において \mathcal{L} -項の選び方を工夫することで, 個別の問題にある程度性能の良い充足判定を行える場合もある.
- * 命題論理における恒真性や充足可能性の判定は決定可能である. (真理値表を書けば良い)