I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

補講：エルブランの定理

エルブランの定理

$\mathcal{L} = (\mathcal{C}; \mathcal{F}; \mathcal{R})$ を定数記号を少なくとも一つ含む言語とする.

定理 (エルブランの定理 / Herbrand's theorem)

φ を量化記号を含まない $\mathcal{L}$-論理式で x のみを自由変数として持つものとする. このとき次の (i),(ii) は同値である.

(i) $\mathcal{L}$-文 $\exists x \varphi$ が 恒真 / LK で証明可能.

(ii) 有限個の $\mathcal{L}$-閉項 $t_1, \ldots, t_n$ が存在して
$\mathcal{L}$-文 $\bigvee_{1 \le i \le n} \varphi[t_i/x]$ が 恒真 / LK で証明可能.

- エルブランの定理によれば, $\exists x \varphi$ の形の $\mathcal{L}$-文の恒真性を調べるには x に閉項を次々に代入し $\vee$ で結んだ量化記号のない $\mathcal{L}$-文の恒真性を調べれば良い.
- 一方, 量化記号のない $\mathcal{L}$-文の恒真性は命題論理のときとほとんど同様に決定的な方法で調べられる.
(各原子論理式を命題変数/命題定数と思えば良い.)

$\mathcal{T}$ を $\mathcal{L}$-閉項全体の集合とする.

補題

$\mathcal{M} = (M, v)$ を $\mathcal{L}$-構造とする. このとき $\mathcal{T}^{\mathcal{M}} = \{t^{\mathcal{M}} \in M : t \in \mathcal{T}\}$ は $\mathcal{M}$ の部分構造をなす.
すなわち $\mathcal{T}^{\mathcal{M}} = \mathcal{N} = (\mathcal{T}^{\mathcal{M}}, v_{\mathcal{N}})$ を

- $v_{\mathcal{N}}(c) = v(c)$ $(c \in \mathcal{C})$
- $v_{\mathcal{N}}(f) = v(f) \upharpoonright (\mathcal{T}^{\mathcal{M}})^n$ ($f \in \mathcal{F}$ は n-変数関数記号)
- $v_{\mathcal{N}}(R) = v(R) \cap (\mathcal{T}^{\mathcal{M}})^n$ ($R \in \mathcal{R}$ は n-項関係記号)

とおくと $\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}$ の部分構造である.

補題

$\mathcal{N}$ を $\mathcal{M}$ の部分構造とする. このとき次が成り立つ.

1. ψ を量化記号を持たない $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-文とする. このとき $\mathcal{M} \models \psi$ ならば $\mathcal{N} \models \psi$ である.
2. ψ を量化記号を持たない $\mathcal{L}$-論理式とし $\bar{\psi}$ を ψ の全称閉包とする. このとき $\mathcal{M} \models \bar{\psi}$ ならば $\mathcal{N} \models \bar{\psi}$ である.

エルブランの定理の証明の概要

(ii) ⇒ (i):

- シーケント $\bigvee_{1\le i\le n}\varphi[t_i/x] \vdash \exists x\varphi$ が証明可能であることを示し, (cut) を適用すれば良い.

(i) ⇒ (ii): 対偶を示す.

- どんな有限個の $\mathcal{L}$-閉項 $t_1,\ldots,t_n$ に対しても $\mathcal{L}$-文 $\bigvee_{1\le i\le n}\varphi[t_i/x]$ が LK で証明可能でないとする.
- $\Gamma = \{\neg\varphi[t/x] : t \in \mathcal{T}\}$ とおく. このとき任意の有限部分集合 $\Gamma' \subseteq \Gamma$ は 無矛盾 / 充足可能である.
- よって Γ は 無矛盾 / 充足可能 である.
- $\mathcal{M} \models \Gamma$ を取る. 一つ目の補題より部分構造 $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ の部分構造をなす.
- $\mathcal{M}$ の定義より任意の $\mathcal{L}$-閉項 t に対して $\mathcal{M} \models \neg\varphi[t/x]$, よって二つ目の補題より $\mathcal{T}^{\mathcal{M}} \models \neg\varphi[t^{\mathcal{M}}/x]$ である.
- よって $\mathcal{T}^{\mathcal{M}} \models \forall x\neg\varphi$ が得られる.

エルブランの定理には他にも様々な証明方法がある.

- カット除去定理より得られた部分論理式の性質を用いると意味論を一切経由しない証明が得られる.
- 一方, (i) $\Rightarrow$ (ii) の証明で用いた Γ のモデルとして, 特に $\mathcal{T}$ (あるいはその商集合) を領域にもつ $\mathcal{L}$-構造を直接構成することもできる.