I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 2 回: 命題論理の意味論

命題論理の付値

以下，命題論理の論理式全体の集合を PROP で表すことにする．
また，論理式の真，偽を表す値を $\mathbf{T}, \mathbf{F}$ で表すこととする．

定義 (付値関数，真理値)

次を満たす関数 $v : \mathrm{PROP} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ を付値関数という．

論理式 φ に対して

- $v(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow v(\psi) = \mathbf{T}$ かつ $v(\eta) = \mathbf{T}$ $(\varphi \equiv \psi \wedge \eta$ のとき$)$
- $v(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow v(\psi) = \mathbf{T}$ または $v(\eta) = \mathbf{T}$ $(\varphi \equiv \psi \vee \eta$ のとき$)$
- $v(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow v(\psi) = \mathbf{F}$ または $v(\eta) = \mathbf{T}$ $(\varphi \equiv \psi \to \eta$ のとき$)$
- $v(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow v(\psi) = \mathbf{F}$ $(\varphi \equiv \neg\psi$ のとき$)$
- $v(\top) = \mathbf{T}$, $v(\bot) = \mathbf{F}$

付値関数 v が与えられたとき論理式 φ の v による値 $v(\varphi)$ を φ の v による真理値 (あるいは付値) と呼ぶ．

* 各命題変数の付値が定まると論理式の付値が定まる，これを書き表したものを真理値表という．

命題論理の付値

定理

v, v' を付値関数とする．このとき論理式 φ に現れる任意の原始命題 p について $v(p) = v'(p)$ であれば，$v(\varphi) = v'(\varphi)$.

(証明) 論理式に現れる論理結合子の数に関する帰納法による．
$m(\varphi)$ で φ に現れる論理結合子の数を表すとする．

- $m(\varphi) = 0$ のとき
  - φ が原始命題のとき: 仮定より $v(\varphi) = v'(\varphi)$.
  - $\varphi \equiv \top$ のとき: 付値の定義より $v(\varphi) = v'(\varphi) = \mathbf{T}$.
  - $\varphi \equiv \bot$ のとき: 付値の定義より $v(\varphi) = v'(\varphi) = \mathbf{F}$.
- $m(\varphi) = n + 1$ のとき
  ($m(\varphi) \leq n$ のとき $v(\varphi) = v'(\varphi)$ と仮定)
  - $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ のとき:
    $v(\varphi) = \mathbf{T}$
    $\Leftrightarrow v(\varphi_1) = \mathbf{T}$ かつ $v(\varphi_2) = \mathbf{T}$
    $\Leftrightarrow v'(\varphi_1) = \mathbf{T}$ かつ $v'(\varphi_2) = \mathbf{T}$
    $\Leftrightarrow v'(\varphi) = \mathbf{T}$.
  - $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi \equiv \varphi_1 \rightarrow \varphi_2, \varphi \equiv \neg\varphi_1$ のときも同様

恒真, 充足可能, 充足不可能

定義

命題論理の論理式 φ について

- φ が恒真 (valid)
  $\iff$ 任意の付値 v について $v(\varphi) = \mathbf{T}$.
- φ が充足可能 (satisfiable)
  $\iff$ ある付値 v について $v(\varphi) = \mathbf{T}$.
- φ が充足不可能 (unsatisfiable)
  $\iff$ φ は充足可能でない
  $\iff$ 任意の付値 v について $v(\varphi) = \mathbf{F}$.

このとき定義から次はすぐに分かる.

- φ が恒真 $\iff$ $\neg\varphi$ は充足不可能.

恒真, 充足可能, 充足不可能

Example

次の論理式は恒真

- $p \vee \neg p$
- $p \rightarrow p \vee q$
- $\top$

次の論理式は充足可能

- p
- $p \wedge q \rightarrow \neg p$

次の論理式は充足不可能

- $p \wedge \neg p$
- $(p \rightarrow \neg p \wedge q) \wedge p$
- $\bot$

充足関係, 論理的同値

定義 (充足関係)

論理式の集合 Γ, Δ と論理式 φ に対し充足関係 $\models$ を次で定める.

- $\Gamma \models \varphi$
  $\iff$ 任意の付値関数 v に対して,
  「すべての $\psi \in \Gamma$ に対して $v(\psi) = \mathbf{T}$ ならば $v(\varphi) = \mathbf{T}$」.
- $\Gamma \models \Delta$
  $\iff$ ある論理式 $\eta \in \Delta$ に対して $\Gamma \models \eta$.

- 特に $\emptyset \models \varphi \Leftrightarrow \varphi$ は恒真　($\emptyset \models \varphi$ は通常 $\models \varphi$ と書く)

定義

論理式 φ, ψ が論理的同値とは $\{\varphi\} \models \psi$ かつ $\{\psi\} \models \varphi$, すなわち任意の付値関数 v に対して $v(\varphi) = v(\psi)$ が成り立つことである.

- 論理式 φ と ψ が論理的同値 $\Leftrightarrow$ 論理式 $\varphi \leftrightarrow \psi$ が恒真.

補題

v を付値関数，φ, ψ_1, ψ_2 を論理式とする．このとき次が成り立つ．

$$v(\psi_1) = v(\psi_2) \Rightarrow v(\varphi[\psi_1/p]) = v(\varphi[\psi_2/p]).$$

(証明アイデア)
ψ_i を一つの原始命題のように扱えば良い．
論理式 φ の構成に関する帰納法．

定理

φ, ψ を論理式とする．このとき φ が恒真ならば $\varphi[\psi/p]$ も恒真である．

(証明) v を任意にとる．
新しい付値 v' を $v'(p) = v(\psi)$, $v'(q) = v(q)$ ($q \neq p$ のとき) と定める．
このとき上の補題より $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$ である．
φ は恒真なので $v'(\varphi) = \mathbf{T}$，よって $v(\varphi[\psi/p]) = \mathbf{T}$.

重要な論理的同値/恒真論理式

定理 (重要な論理的同値/恒真論理式)

以下は全て恒真.

1. $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \lor \psi)$.
2. 交換法則 *(commutativity)*: $\varphi \land \psi \leftrightarrow \psi \land \varphi$.
3. 交換法則: $\varphi \lor \psi \leftrightarrow \psi \lor \varphi$.
4. 結合法則 *(associativity)*: $(\varphi \land \psi) \land \eta \leftrightarrow \varphi \land (\psi \land \eta)$.
5. 結合法則: $(\varphi \lor \psi) \lor \eta \leftrightarrow \varphi \lor (\psi \lor \eta)$.
6. 分配法則 *(distributivity)*: $(\varphi \land \psi) \lor \eta \leftrightarrow (\varphi \lor \eta) \land (\psi \lor \eta)$.
7. 分配法則: $(\varphi \lor \psi) \land \eta \leftrightarrow (\varphi \land \eta) \lor (\psi \land \eta)$.
8. ドモルガンの法則 *(de Morgan's law)*: $\neg(\varphi \land \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \lor \neg\psi)$.
9. ドモルガンの法則: $\neg(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \land \neg\psi)$.
10. 二重否定の除去: $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$.

連言標準形と選言標準形

Γ を論理式の有限列 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ とする．このとき，

- $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \equiv \bigwedge \Gamma \equiv ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \cdots \wedge \varphi_n$,
- $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i \equiv \bigvee \Gamma \equiv ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \cdots \vee \varphi_n$,

と定める．

定義

Γ_i $(1 \leq i \leq n)$ をリテラルの集合とするとき，次の形の論理式を選言標準形，連言標準形の論理式という．

- 連言標準形: $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee \Gamma_i$.
- 選言標準形: $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge \Gamma_i$.

連言標準形と選言標準形

定理

任意の論理式は連言標準形の論理式および選言標準形の論理式と論理的同値である.

- 上の定理により得られる φ と同値な連言標準形/選言標準形の論理式を φ の連言標準形/選言標準形という.
- ただし「標準形」という名前だが φ の連言標準形や選言標準形は一つには定まらないことに注意.

Example

$\varphi \equiv p \to (\neg q \to \neg(r \to \neg s))$ とする.

- φ の選言標準形は $\neg p \lor q \lor (r \land s)$
- φ の連言標準形は $(\neg p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor s)$