I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 3 回: 命題論理のシーケント計算 LK

シーケント計算 LK(命題論理) による証明

* 証明体系、形式証明とは?
* LK の公理と推論規則
* LK における証明の例
* 「正しいこと」「証明できること」その関係は？
* 証明可能性と真偽の関係: 完全性定理

形式的な証明とは

疑問

- 論理式 (が正しいこと) を「証明」したい
- その「証明」について調べたい

形式的に証明できる？

- 「証明」は意味を考えながら行うもの？
- しかし、３段論法のような多くの証明のステップは「機械的」にも見える
- 計算を「筆算」するように証明も「機械的」にできないか？

証明されたものを「正しい」というには？

- 証明の意味を考えながら主張の正しさを確認するのは大変
- 有限的な記号操作でできあがった「形式証明」が「正しく作られたものか」を検証するのは簡単

以降では「(形式) 証明」とは何かを定め，その性質を (メタ) 数学的に調べる．

シーケント計算 LK(概略)

形式証明体系シーケント計算 LK は次よりなる.

- 始式 $A \vdash A$　A は論理式
- 推論規則 (構造規則)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{cut})\ ,\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\mathrm{WR})\ ,\ldots$$

- 推論規則 (論理結合子)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ (\wedge\mathrm{R})\ ,\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\to\mathrm{L})\ ,$$

(複数の) 始式から始まり、推論規則に基づいたシーケントの変形を記述した (樹状) 列/図を LK の証明図 (あるいは単に証明) という。証明図の最下段のシーケントを終式という。

定義

- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が証明可能
  $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \Delta$ を終式に持つ証明図が存在.
- 論理式 A が証明可能 $\Leftrightarrow$ $\vdash A$ を終式に持つ証明図が存在.

LK の始式と推論規則

LK の始式

$A \vdash A$

LK の推論規則

(構造規則)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{WL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\mathrm{WR})$$

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{CL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\mathrm{CR})$$

$$\frac{\Pi, A, B, \Gamma \vdash \Delta}{\Pi, B, A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{EL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Sigma}\ (\mathrm{ER})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{cut})$$

LKの始式と推論規則 (続き)

LKの推論規則 (続き)

(論理結合子の規則)

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge \mathrm{L}) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{B \wedge A, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge \mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} (\wedge \mathrm{R})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} (\vee \mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee \mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, B \vee A} (\vee \mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} (\rightarrow \mathrm{L}) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow \mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg \mathrm{L}) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} (\neg \mathrm{R})$$

LKの証明図と終式

証明 (図) とは: (複数の) 始式から始まり，推論規則に基づいたシーケントの変形を記述した (樹状) 列/図

証明された式: 証明図の最下段のシーケント (終式)

定義 (シーケント計算 LK の証明図)

LK の証明図は以下で与えられる．

- 始式 (のみからなる図式)π は証明図である．
  またこのとき π の終式は始式である．
- π_1, π_2 が証明図のとき，π_1(または π_1, π_2) の終式を上式とする推論規則を π_1(または π_1, π_2) の下に加えた図式 π は証明図である．
  またこのとき π の終式は新たに追加した推論規則の下式である．

定義

証明図 π の終式が $\Gamma \vdash \Delta$ であるとき π を $\Gamma \vdash \Delta$ の証明と呼ぶ．

LKにおける証明可能性

定義 (LKにおける証明可能性)

- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ がLKで証明可能 (provable in LK)
  $\iff \Gamma \vdash \Delta$ の証明が存在
- 論理式 φ がLKで証明可能
  $\iff$ シーケント $\vdash \varphi$ がLKで証明可能
- 論理式 φ がLKで反証可能
  $\iff$ シーケント $\vdash \neg\varphi$ がLKで証明可能
- Γ を論理式の集合，φ を論理式とする．このとき，
  φ が Γ からLKで証明可能
  $\iff$ 有限な $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ が存在して，$\Gamma_0 \vdash \varphi$ がLKで証明可能

「$\Gamma \vdash \Delta$ が (LKで) 証明可能」，「φ が Γ からLKで証明可能」
をそれぞれ $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$, $\Gamma \vdash_{LK} \varphi$ と書く．
(あるいは単に $\Gamma \vdash \Delta$, $\Gamma \vdash \varphi$ と書くこともある．)

証明可能な論理式

Example

以下は全て LK において証明可能.

1. $(\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$.
2. 交換法則 (commutativity): $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$.
3. 交換法則: $\varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$.
4. 結合法則 (associativity): $(\varphi \wedge \psi) \wedge \eta \to \varphi \wedge (\psi \wedge \eta)$.
5. 結合法則: $(\varphi \vee \psi) \vee \eta \to \varphi \vee (\psi \vee \eta)$.
6. 分配法則 (distributivity): $(\varphi \wedge \psi) \vee \eta \to (\varphi \vee \eta) \wedge (\psi \vee \eta)$.
7. 分配法則: $(\varphi \vee \psi) \wedge \eta \to (\varphi \wedge \eta) \vee (\psi \wedge \eta)$.
8. ドモルガンの法則 (de Morgan's law): $\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
9. ドモルガンの法則: $\neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.
10. 二重否定の除去: $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

上の逆向きも全て証明可能.

LK の基本的な性質

定理 (演繹定理)

次は同値.

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ は *LK* で証明可能.
2. $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ は *LK* で証明可能.

(証明)

1 ⇒ 2: 推論規則 (→R) より容易に分かる.

2 ⇒ 1: まず $\Gamma, \varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ が証明可能であることを示す.
そして

- $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ を終式にもつ証明図, と
- $\Gamma, \varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ を終式に持つ証明図

に推論規則 (cut) を適用する.

LK の基本的な性質 (矛盾)

以下 $\Gamma \vdash_{LK}$ (右辺は空列) を $\Gamma \vdash_{LK} \bot$ とも書くことにする.
(命題定数 $\bot$ を (WR) できると思っても良い.)

定義

Γ を論理式の集合とする.

- ある有限列 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ について $\Gamma_0 \vdash_{LK} \bot$ のとき Γ は矛盾するという.
- Γ が矛盾しないとき Γ は無矛盾であるという.

定理

Γ を論理式の集合, φ を論理式とする. このとき次が成り立つ.

1. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \varphi$.
2. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \neg\varphi$.
3. Γ が矛盾 $\Leftrightarrow$ ある論理式 ψ について $\Gamma \vdash_{LK} \psi$ かつ $\Gamma \vdash_{LK} \neg\psi$
   $\Leftrightarrow \Gamma$ は LK において全ての論理式を証明する.

この定理も演繹定理と同様の方針で証明できる.

LKの最重要定理

定理 (完全性定理 completeness theorem)

$$\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \Delta.$$

すなわち，次の二つが成り立つ．

1. 健全性定理 *soundness theorem:*
   $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能ならば $\Gamma \models \Delta$.
2. 完全性定理 *completeness theorem:*
   $\Gamma \models \Delta$ ならば $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能.

系 (完全性定理)

論理式 φ について次は同値である．

1. φ は恒真である．
2. φ は LK で証明可能である．