I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 4 回: 完全性定理

LKの完全性定理

定理 (完全性定理 completeness theorem)

$$\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \Delta.$$

すなわち，次の二つが成り立つ．

1. 健全性定理 *soundness theorem:*
   $\Gamma \vdash \Delta$ が *LK* で証明可能ならば $\Gamma \models \Delta$.
2. 完全性定理 *completeness theorem:*
   $\Gamma \models \Delta$ ならば $\Gamma \vdash \Delta$ が *LK* で証明可能.

系 (完全性定理)

論理式 φ について次は同値である．

1. φ は *LK* で証明可能である．
2. φ は恒真である．

LKの完全性定理

より一般に次も成り立つ.

系 (完全性定理)

Γ を論理式の集合 (無限でも良い), φ を論理式とする.
このとき次は同値である.

1. φ は Γ から LK で証明可能である.
2. $\Gamma \models \varphi$.

完全性定理を用いると,
「証明 (不) 可能性」「充足 (不) 可能性」「恒真性」
は次のように言い換えられる.

- φ が恒真 $\Leftrightarrow$ φ は証明可能 $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ は充足不可能
- φ が充足可能 $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ は恒真でない $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ は証明不可能
- $\neg\varphi$ が充足可能 $\Leftrightarrow$ φ は恒真でない $\Leftrightarrow$ φ は証明不可能
- φ が充足不可能 $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ は恒真 $\Leftrightarrow$ φ は反証可能

Γ を論理式の集合とする．このとき，

- Γ が充足可能

  $\Longleftrightarrow$

  Γ の全ての論理式の真理値を同時に $\mathbf{T}$ にするような付値関数が存在する

と定める.（この定義は Γ が無限の時にも使える.）

このとき完全性定理は次の形でも表現できる.
(この定理は Γ が無限でも成り立つ．)

定理 (完全性定理 (別表現))

$$\Gamma \text{は無矛盾} \Leftrightarrow \Gamma \text{は充足可能}.$$

(証明) 矛盾の基本性質による.

系 (コンパクト性定理)

$$\Gamma \text{の任意の有限部分集合は充足可能} \Leftrightarrow \Gamma \text{は充足可能}.$$

「証明できないこと」の証明

Example

論理式 $\neg p \to p$ が証明できないことを示せ.

(解法)

系 (完全性定理)

論理式 φ について次は同値である.

1. φ は LK で証明可能である.
2. φ は恒真である.

- $\neg\varphi$ が充足可能 $\Leftrightarrow$ φ は恒真でない $\Leftrightarrow$ φ は証明不可能

より $\neg p \to p$ の真理値表を書いて更新で無いことを確認すれば良い.

「証明できないこと」の証明

Example

論理式 $\neg p \to p$ が証明できないことを示せ.

(解法)

系 (完全性定理)

論理式 φ について次は同値である.

1. φ は LK で証明可能である.
2. φ は恒真である.

- $\neg\varphi$ が充足可能 $\Leftrightarrow$ φ は恒真でない $\Leftrightarrow$ φ は証明不可能

より $\neg p \to p$ の真理値表を書いて恒真で無いことを確認すれば良い.