I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 5 回: 完全性定理の証明

LKの完全性定理

定理 (完全性定理 completeness theorem)

$$\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \Delta.$$

すなわち，次の二つが成り立つ．

1. 健全性定理 *soundness theorem:*
   $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能ならば $\Gamma \models \Delta$.
2. 完全性定理 *completeness theorem:*
   $\Gamma \models \Delta$ ならば $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能.

完全性定理の証明

1. 健全性定理の証明
2. 完全性定理の証明 †

完全性定理の証明

1. 健全性定理の証明
2. 完全性定理の証明 †

定理

$$\Gamma \vdash_{LK} \Delta \Rightarrow \Gamma \models \Delta.$$

(証明)

シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能とする．このとき，証明図に現れる各シーケントについて

(∗) 任意の付値 v について

$$v\left(\bigwedge \Gamma\right) = \mathbf{T} \Longrightarrow v\left(\bigvee \Delta\right) = \mathbf{T}$$

が成り立つことを証明図の構成に関する帰納法で示す．すなわち

- 始式で (∗) が成り立つ，
- 各推論規則において，上段で (∗) が成り立てば，下段でも (∗) が成り立つ，

ことを示せば良い．

$(*)$ 任意の付値 v について

$$v\left(\bigwedge \Gamma\right) = \mathbf{T} \Longrightarrow v\left(\bigvee \Delta\right) = \mathbf{T}$$

以下の手順で確認する.

- 始式は $\varphi \vdash \varphi$ の形であるので, $(*)$ が成り立つことは自明.
- 構造規則について
  「上段で $(*)$ が成り立てば, 下段でも $(*)$ が成り立つこと」
  は比較的容易に分かる.
  (規則 (cut) については少し注意が必要)
- 論理結合子の規則に関して
  「上段で $(*)$ が成り立てば, 下段でも $(*)$ が成り立つこと」
  を一つ一つ確認する.

  ここでは $(\to\mathrm{R})$, $(\vee\mathrm{L})$ のときを見る.
  (他のケースも各々示すことができる.)

(∗) 任意の付値 v について

$$v\left(\bigwedge \Gamma\right) = \mathbf{T} \Longrightarrow v\left(\bigvee \Delta\right) = \mathbf{T}$$

(→R) のとき

$\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta$ について (∗) が成り立つとする．
(このとき $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Delta$ について (∗) が成り立つことを示せば良い．)

今，付値関数 v を任意に取り，$v(\bigwedge \Gamma) = \mathbf{T}$ とする．
$v(\varphi) = \mathbf{T}$ かどうかで場合分けをする．

- もし，$v(\varphi) = \mathbf{T}$ であれば，$v(\varphi \wedge \bigwedge \Gamma) = \mathbf{T}$ である．
  よって仮定より $v(\psi \vee \bigvee \Delta) = \mathbf{T}$ となる．
  今 $v(\psi) = \mathbf{T}$ ならば $v(\varphi \rightarrow \psi) = \mathbf{T}$,
  そうでないならば $v(\bigvee \Delta) = \mathbf{T}$,
  よっていずれの場合も $v((\varphi \rightarrow \psi) \vee \bigvee \Delta) = \mathbf{T}$ である．
- 一方，$v(\varphi) = \mathbf{F}$ であれば，$v(\varphi \rightarrow \psi) = \mathbf{T}$ である．

いずれの場合でも，$v((\varphi \rightarrow \psi) \vee \bigvee \Delta) = \mathbf{T}$ と分かった．

(∗) 任意の付値 v について

$$v\left(\bigwedge\Gamma\right)=\mathbf{T}\Longrightarrow v\left(\bigvee\Delta\right)=\mathbf{T}$$

($\vee$L) のとき

$\Gamma,\varphi\vdash\Delta$ および $\Gamma,\psi\vdash\Delta$ について (∗) が成り立つとする．
(このとき $\Gamma,\varphi\vee\psi\vdash\Delta$ について (∗) が成り立つことを示せば良い．)

今，付値関数 v を任意に取り，$v(\bigwedge\Gamma\wedge(\varphi\vee\psi))=\mathbf{T}$ とする．
このとき，$v(\bigwedge\Gamma)=\mathbf{T}$ かつ $v(\varphi\vee\psi)=\mathbf{T}$ であるので，特に
$v(\varphi)=\mathbf{T}$ または $v(\psi)=\mathbf{T}$ のいずれかが成り立つ．

- もし $v(\varphi)=\mathbf{T}$ であれば $v(\bigwedge\Gamma\wedge\varphi)=\mathbf{T}$ であるので，仮定の一つ目より $v(\bigvee\Delta)=\mathbf{T}$ である．
- もし $v(\psi)=\mathbf{T}$ であれば $v(\bigwedge\Gamma\wedge\psi)=\mathbf{T}$ であるので，仮定の二つ目より $v(\bigvee\Delta)=\mathbf{T}$ である．

したがっていずれの場合でも $v(\bigvee\Delta)=\mathbf{T}$ と分かった．

証明探索

ここでは LK の ((cut) 規則を用いない) 証明図を探索する，と言う手法をとる．

- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ を終式に持つ LK の証明図で，推論規則 (cut) を含まない物が存在するとき，$\Gamma \vdash \Delta$ は LK-(cut) で証明可能であるという．

$\Gamma \models \Delta$ であるとき，以下のようなアイデアで $\Gamma \vdash \Delta$ を終式に持つ (cut) を含まない LK の証明図を探すことができる．
この手法は証明探索 (proof search) と呼ばれる．

- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ の Γ, Δ は集合だと思って良い
- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が共通の論理式 $\varphi \in \Gamma \cap \Delta$ を持つとき closed と呼ぶ．そうでないとき open と呼ぶ．
- closed なシーケントは始式と思って良い (weakening を繰り返して起用することにより始式に帰着される)．
- open なシーケントを上へ伸ばし，証明図を探索する．

証明探索 –分解木の構成–

分解: シーケントに現れる論理式を一つ選び，その論理式に現れる一番外側の論理結合子に着目して，論理結合子の推論規則を逆向きに適用し，下式から上式 (2 つあるかも) を作る．

このとき，次を満たすようにする．

- 上式に現れるシーケントは左辺，右辺とも下式の左辺右辺を包含する
(contraction を下から上に適用することにより必要な論理式をコピーしておけば良い)
- 上式 (2 つある場合は両方) の左辺か右辺のいずれかは下式より真に大きくなる
(少なくとも一つ論理式を追加する)

こうして作られる上式 (の組) は下式の分解と呼ばれる．

LK-(cut) の証明探索のための分解

$$\frac{A, B, A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}(\wedge\text{L'}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}(\wedge\text{R})$$

$$\frac{A, A \vee B, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}(\vee\text{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}(\vee\text{R'})$$

$$\frac{A \to B, \Gamma \vdash \Delta, A \qquad A \to B, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}(\to\text{L}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, A \to B, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}(\to\text{R})$$

$$\frac{\neg A, \Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}(\neg\text{L}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, \neg A}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}(\neg\text{R})$$

各推論規則に対応した分解は以下の通り.
(上段のシーケントを下段のシーケントの分解という.
こちらを論理結合子の推論規則と思っても良い．)

証明探索 –分解木の構成–

$\Gamma \vdash \Delta$ に分解を繰り返し適用して得られる樹状図を
$\Gamma \vdash \Delta$ の分解木と呼ぶ.

($\Gamma \vdash \Delta$ の分解木は $\Gamma \vdash \Delta$ の証明図もどきだと思うことができる．)

- 分解で現れる論理式は最初のシーケントに含まれる論理式の部分論理式のみ.
- これ以上，分解ができなくなったら終わり.
（シーケントが全て closed になるか，どの論理結合子に規則を適用してもそれ以上論理式を増やせなくなったら終わり）

シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ に現れる論理式の部分論理式が有限個しかなく，下から上に集合が真に大きくなっていくのでこの操作はどこかで必ずとまる.

Example

シーケント $p, p \to q \vdash p \wedge q, r$ の分解木を構成せよ.

この分解木は全ての枝が closed になり構成が終わる.

Example

シーケント $p, \neg q \vdash p \to q, \neg p \vee q$ の分解木を構成せよ.

この分解木には open でそれ以上分解できない枝が残ったまま構成が終わる.

分解木の性質

このとき，次のいずれかが起こる．

(i) 一番上に残っているシーケントが全て closed になる． このとき， この分解木から LK のカットを使わない $\Gamma \vdash \Delta$ の証明図ができる．

(ii) 一番上に残っているシーケントの一つで，open だがこれ以上大きくならない (分解できない) シーケントがみつかる．

$\Gamma \models \Delta$ のとき，実は (ii) は起こらない．
このことから完全性定理が得られる．

定理 (LK-(cut) の 完全性定理)

次は同値.

1. $\Gamma \vdash \Delta$ が *LK-(cut)* で証明可能.
2. $\Gamma \vdash \Delta$ が *LK* で証明可能.
3. $\Gamma \models \Delta$.

(証明)

$3 \to 1$ を示す．対偶を示せばよい．
シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が LK-(cut) で証明できないとする．$\Gamma \vdash \Delta$ より proof search を行い，これ以上大きくならない分解木を得る．これを π とする．このとき，π の一番上 (木の葉の部分) に現れるシーケントの一つは open かつ分解によりこれ以上大きくならないシーケント $\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ がみつかる．なぜなら，そうでなければ π の葉の部分現れるシーケントは全て closed となるので，π を変形することで $\Gamma \vdash \Delta$ が LK-(cut) で証明可能になってしまうからである．

このとき，$\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ の分解に対する極大性から，$\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$(の左辺) は以下を満たすヒンティカ集合 (Hintikka set) と呼ばれる集合になっていることが分かる．

- $\varphi \wedge \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi, \psi \in \bar{\Gamma}$ ((∧L’) に対応)
- $\varphi \vee \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ または $\psi \in \bar{\Gamma}$ ((∨L) に対応)
- $\varphi \to \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\psi \in \bar{\Gamma}$ または $\varphi \in \bar{\Delta}$ ((→L) に対応)
- $\neg\varphi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi \in \bar{\Delta}$ ((¬L) に対応)
- $\varphi \wedge \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Delta}$ または $\psi \in \bar{\Delta}$ ((∧R) に対応)
- $\varphi \vee \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi, \psi \in \bar{\Delta}$ ((∨R’) に対応)
- $\varphi \to \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ かつ $\psi \in \bar{\Delta}$ ((→R) に対応)
- $\neg\varphi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ ((¬R) に対応)

今，$\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ の左辺に原始論理式として現れる命題変数にすべて **T** を割り当て，他の命題変数にすべて **F** を割り当てる (従って右辺に現れる命題変数は全て **F** を割り当てる) 付値関数 v を考える．

- そのような付値関数 v はただ一つ存在する．
- すると，左辺に現れる論理式の真理値はすべて **T**，右辺に現れる論理式の真理値はすべて **F** になっている．
  - 論理式に現れる論理結合子の数に関する帰納法による．
    命題変数の場合 (結合子 0) は正しいので，あとは論理結合子ごとに Hintikka set の性質を用いて確認する．
- すなわち $v(\bigwedge \bar{\Gamma}) = \mathbf{T}$ かつ $v(\bigvee \bar{\Delta}) = \mathbf{F}$.
- すると $\Gamma \subseteq \bar{\Gamma}$, $\Delta \subseteq \bar{\Delta}$ なので $\Gamma \not\models \Delta$.

(証明終)