

# I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 6 回: カット除去定理

# 推論規則 (cut)

推論規則 (cut) の役割とは？

- 3段論法をして良いですよ，ということ，つまり
- $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \eta$  が証明可能なら (どんな証明を経由していても)  $\varphi \vdash \eta$  も証明可能.

推論規則 (cut) は人間が証明を考えるためには不可欠.

## 疑問

推論規則 (cut) は必要なのか？

完全性定理で見た次の同値性の  $2 \rightarrow 1$  はカット除去定理と呼ばれる。

## 定理 (カット除去定理)

次は同値。

- 1  $\Gamma \vdash \Delta$  が  $LK\text{-}(cut)$  で証明可能.
- 2  $\Gamma \vdash \Delta$  が  $LK$  で証明可能.
- 3  $\Gamma \models \Delta$ .

# Subformula property

LK の推論規則を注意深く眺めると,

- (cut) 以外の規則では上段に現れる論理式は全て下段に現れる論理式の部分論理式になっている.
- よって  $\Gamma \vdash \Delta$  が LK-(cut) で証明できれば, その証明図は  $\Gamma, \Delta$  に含まれる論理式の部分論理式しか含まない.

よってカット除去定理より次が分かる.

## 定理 (部分論理式性 subformula property)

シーケント  $\Gamma \vdash \Delta$  が LK で証明可能であれば,  $\Gamma \vdash \Delta$  の証明図で  $\Gamma, \Delta$  に含まれる論理式の部分論理式しか含まないものが存在する.

# カット除去定理の帰結

カット除去定理やこの部分論理式の性質からは様々なことが分かる。

- LK-(cut) での証明では，部分論理式の性質が成り立つため，証明の回り道が許されない。
- よって回り道を含む証明 (演繹定理や 3 段論法，矛盾を経由した証明) にカット除去定理を適用することで直接的な証明の存在が分かる。
- 証明体系の無矛盾性が分かる  
(LK-(cut) は仮定無しに矛盾 ( $\vdash \perp$ ) を証明しない)
- ... (他にも色々)

## 定理 (クレイグの補間定理)

$\varphi \rightarrow \psi$  が証明可能なとき,  $\varphi, \psi$  に共通で現れる命題変数および命題定数のみを持つ論理式  $\eta$  が存在して  $\varphi \rightarrow \eta$  および  $\eta \rightarrow \psi$  が証明可能になる.

定理で現れる  $\eta$  は補間文と呼ばれる.

- 特に,  $\varphi, \psi$  が共通の命題変数を持たないとき,  $\eta \equiv \top$  か  $\eta \equiv \perp$  である.
- したがってこのとき

$$\neg\varphi (\leftrightarrow \varphi \rightarrow \perp), \quad \psi (\leftrightarrow \top \rightarrow \psi)$$

のいずれかが証明可能/恒真である.