I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 7 回：述語論理の論理式

述語論理とは

述語論理: ある集合/構造における主張を記述する.

記述に用いるのは...

- 集合の上を動く変数 $x, y, \ldots$
- 等号 “$=$”
- (指定された) 関係 (述語) と関数と定数 (の記号)
- 「すべての... について」 を表す記号 “$\forall$”
- 「ある... が存在して」 を表す記号 “$\exists$”
- (命題論理の時と同じ) 論理結合子

Example

$$\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y).$$

「すべての x とすべての y について $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$」
すなわち 「f は単射である」

$$\forall y \exists x (f(x) = y).$$

「すべての y についてある x が存在して $f(x) = y$」
すなわち 「f は全射である」

Example

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z)).$$

「R は推移的関係である」

述語論理の論理式と意味論のキーワード

- 項と論理式
- 自由変数と束縛変数
- 構造
- 充足関係 $\models$
- 恒真性
- 充足可能性

述語論理の言語

定義 (述語論理の言語)

述語論理の言語は

- 変数記号: $x_0, x_1, \ldots$
- 論理結合子: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$
- 量化記号: $\forall x$, $\exists x$
- 等号 (特別な 2 項関係記号): $=$

および次で与える，扱う対象に応じた固有の言語 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}; \mathcal{F}; \mathcal{R})$ よりなる．

- $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots\}$: 定数記号の集合
- $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots\}$: 関数記号の集合
- $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots\}$: 関係 (述語) 記号の集合

ただし，関数記号，関係記号にはそれぞれ引数の数 (項数, arity) が定められていることとする．

定数記号は項数 0 の関数記号とみなすこともある．

述語論理の項

以降，言語 $\mathcal{L}$ を一つ固定する．

定義 ($\mathcal{L}$-項)

言語 $\mathcal{L}$ で記述される項 ($\mathcal{L}$-項) は次で与えられる．

- 変数記号，$\mathcal{L}$ の定数記号は $\mathcal{L}$-項である．
- $t_1, \ldots, t_n$ が項，f が $\mathcal{L}$ に含まれる n 変数関数記号のとき，

$$f(t_1, \ldots, t_n)$$

  は $\mathcal{L}$-項である．

Example

- f を 1 変数関数記号, g を 2 変数関数記号, c を定数記号とすれば

$$c, f(x), g(f(c), x), f(f(f(x)))$$

  はいずれも $\mathcal{L}$-項である．

述語論理の原子論理式

定義 (($\mathcal{L}$-) 原子論理式)

言語 $\mathcal{L}$ で記述される原子論理式 ($\mathcal{L}$-原子論理式) は次で与えられる.

- t_1, t_2 が $\mathcal{L}$-項のとき,
$$t_1 = t_2$$
は $\mathcal{L}$-原子論理式である.
- $t_1, \ldots, t_n$ が項, R が $\mathcal{L}$ に含まれる n 項関係記号のとき,
$$R(t_1, \ldots, t_n)$$
は $\mathcal{L}$-原子論理式である.

述語論理の原子論理式

Example

R を 1 項関係記号, $\leq$ を 2 項関係記号
f を 1 変数関数記号, $+$ を 2 変数関数記号
$c, 0$ を定数記号 とすれば

- $R(x)$
- $R(f(f(c)))$
- $x + x = 0$
- $f(c) + x = x$
- $x + x \leq (x + x) + x$

はいずれも $\mathcal{L}$-原子論理式である.

‡ 2 変数関数 $+(x, y)$ や 2 項関係 $\leq (x, y)$ は (混乱の無い限り) "$x + y$", "$x \leq y$" などと表すことが多い.

述語論理の論理式

定義 ($\mathcal{L}$-論理式)

言語 $\mathcal{L}$ で記述される論理式 ($\mathcal{L}$-論理式) は次で与えられる.

- $\mathcal{L}$-原子論理式は $\mathcal{L}$-論理式である.
- φ, ψ が $\mathcal{L}$-論理式, x が変数記号のとき,
  - $(\varphi) \wedge (\psi)$
  - $(\varphi) \vee (\psi)$
  - $(\varphi) \to (\psi)$
  - $\neg(\varphi)$
  - $\forall x(\varphi)$
  - $\exists x(\varphi)$

  は $\mathcal{L}$-論理式である.

(括弧は適宜省略する.)

- $\varphi \leftrightarrow \psi$ は $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ の略記と思うこととする.
- 結合子は通常 $\{\neg, \forall, \exists\}, \{\wedge, \vee\}, \{\to, \leftrightarrow\}$ の順で強く, それに応じて括弧を適宜省略する.

自由変数

定義 (自由変数 FV)

$\mathcal{L}$-項 t，$\mathcal{L}$-論理式 φ の自由変数（の集合）$\mathrm{FV}(t)$，$\mathrm{FV}(\varphi)$ をそれぞれ次で定める．

- t が $\mathcal{L}$-項のとき，$\mathrm{FV}(t)$ とは t に現れる全ての変数記号の集合である．
- φ が $\mathcal{L}$-原子論理式のとき，

$$\mathrm{FV}(\varphi) = \bigcup \{\mathrm{FV}(t) : t \text{ は } \varphi \text{ に現れる } \mathcal{L}\text{-項}\}.$$

- $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2, \varphi \equiv \psi_1 \vee \psi_2, \varphi \equiv \psi_1 \to \psi_2$ のとき，

$$\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi_1) \cup \mathrm{FV}(\psi_2).$$

- $\varphi \equiv \neg\psi$ のとき，$\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi)$.
- x が変数記号で，$\varphi \equiv \forall x\psi, \varphi \equiv \exists x\psi$ のとき，

$$\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi) - \{x\}.$$

束縛変数

定義 (束縛変数 BV)

$\mathcal{L}$-項 t，$\mathcal{L}$-論理式 φ の束縛変数（の集合）$\mathrm{BV}(t)$，$\mathrm{BV}(\varphi)$ をそれぞれ次で定める．

- $\mathrm{BV}(t) = \emptyset$.
- φ が $\mathcal{L}$-原子論理式のとき，
$$\mathrm{BV}(\varphi) = \emptyset.$$
- $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2, \varphi \equiv \psi_1 \vee \psi_2, \varphi \equiv \psi_1 \to \psi_2$ のとき，
$$\mathrm{BV}(\varphi) = \mathrm{BV}(\psi_1) \cup \mathrm{BV}(\psi_2).$$
- $\varphi \equiv \neg\psi$ のとき，$\mathrm{BV}(\varphi) = \mathrm{BV}(\psi)$.
- x が変数記号で，$\varphi \equiv \forall x\psi, \varphi \equiv \exists x\psi$ のとき，
$$\mathrm{BV}(\varphi) = \mathrm{BV}(\psi) \cup \{x\}.$$

Example

次の $\mathcal{L}$-論理式の自由変数と束縛変数は何か?

1. $\forall x \exists y (f(x,z) = y)$.
2. $\exists z \forall y (R(x,y) \land f(x) = y)$.
3. $(\forall x \exists y (f(x) = y)) \to \neg (f(x) = y)$.

- 2 番目のように実際には「使われていない」束縛変数もある. (ダミー変数と呼ばれる.)
- 3 番目の例のように自由変数と束縛変数が重複することもある.

‡ しかしこのような使い方は分かりにくいので, 以降では原則として

$$\mathrm{FV}(\varphi) \cap \mathrm{BV}(\varphi) = \emptyset$$

となるように変数を用いることとする.

論理式の代入

ここでは 2 種類の代入を考える．

定義 (代入)

- (命題論理式への代入): φ が命題変数 p のみをもつ命題論理の論理式とし，ψ を (述語論理の)$\mathcal{L}$-論理式とする．φ に現れる p を (文字列として) 論理式 ψ に置き換えたものを
$$\varphi[\psi/p]$$
で表す．このとき $\varphi[\psi/p]$ は $\mathcal{L}$-論理式である．
- (変数への代入): ψ を $\mathcal{L}$-論理式，x を変数記号，t を $\mathcal{L}$-項とする．このとき，ψ に現れる自由変数 x を t に置き換えたものを
$$\psi[t/x]$$
で表す．

$\mathcal{L}$-論理式 ψ に現れる (かもしれない) 変数記号 x に着目しているとき ψ を $\psi(x)$ とも書くことがある．このとき $\psi[t/x]$ を $\psi(t)$ とも書く．

部分論理式

定義 (部分論理式)

$\mathcal{L}$-論理式 φ の部分論理式を次で定める.

- φ は φ の部分論理式である.
- ψ が φ の部分論理式であり，さらに $\psi \equiv (\theta_1) \wedge (\theta_2)$, $\psi \equiv (\theta_1) \vee (\theta_2)$, $\psi \equiv (\theta_1) \to (\theta_2)$ のいずれかの形であるとき
  θ_1, θ_2 は φ の部分論理式 である.
- ψ が φ の部分論理式であり，さらに $\psi \equiv \neg(\theta)$ の形のとき
  θ は φ の部分論理式 である.
- ψ が φ の部分論理式であり，さらに $\forall x(\theta)$, $\exists x(\theta)$ の形のとき
  θ は φ の部分論理式 である.

部分論理式 (広義)

定義 (部分論理式 (広義))

$\mathcal{L}$-論理式 φ の部分論理式 (広義) を次で定める.

- 部分論理式 (狭義) は部分論理式 (広義) である.
- ψ が φ の部分論理式であり, x が ψ の自由変数, t が $\mathcal{L}$-項であるとき,
$$\psi[t/x]$$
は φ の部分論理式 (広義) である.

閉項, 文/閉論理式, 全称閉包

定義 (閉項)

$\mathcal{L}$-項 t について，$\mathrm{FV}(t) = \emptyset$ のとき，t を $\mathcal{L}$-閉項という．

定義 (文/閉論理式)

$\mathcal{L}$-論理式 φ について，$\mathrm{FV}(\varphi) = \emptyset$ のとき，φ を $\mathcal{L}$-閉論理式，または $\mathcal{L}$-文という．

- φ が $\mathcal{L}$-論理式, $\mathrm{FV}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ のとき,

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$$

  を φ の全称閉包という．

* 全称閉包はつねに閉論理式になる．