I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 8 回：述語論理の意味論

述語論理の意味論

命題論理の意味論は原始命題/命題変数の真理値により定まる **付値関数** によって与えられた.

述語論理の意味論は次で与えられる「構造」$\mathcal{M}$

- 変数の動く **領域 (集合) M** とその上の
  - 定数記号 a, b, c が指す **元** $a^{\mathcal{M}}, b^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \in M$
  - 関数記号 f, g が指す **関数** $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M, g^{\mathcal{M}} : M^k \to M$
  - 関係記号 R, S が指す **関係** $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n, S^{\mathcal{M}} \subseteq M^k$

Example

$\mathcal{L} = (c, d; f, g; R)$ に対し,

- $M = \mathbb{N}$, $c^{\mathcal{M}} = 0$, $d^{\mathcal{M}} = 1$,
  $f^{\mathcal{M}}(x, y) = x + y$, $g^{\mathcal{M}}(x, y) = x \times y$,
  $R^{\mathcal{M}} = \leq = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$

とおくと, $\mathcal{M} = (\mathbb{N}; 0, 1; +, \times; \leq)$ は $\mathcal{L}$-論理式に意味を与える構造 (**$\mathcal{L}$-構造**) になる.

構造

言語は $\mathcal{L} = (\mathcal{C}; \mathcal{F}; \mathcal{R}) = (c_1, \ldots, f_1, \ldots, R_1, \ldots)$ を一つ固定する．

定義 ($\mathcal{L}$-構造)

$\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ とは集合 M と以下を満たす付値関数/解釈 v の組 $\mathcal{M} = (M, v)$ である．ただし v は

- $\mathcal{C}$ の元を M の元に対応させる
- $\mathcal{F}$ の n 変数関数記号を M 上の n 変数関数に対応させる
- $\mathcal{R}$ の n 項関係記号を M 上の n 項関係に対応させる

をみたす $\mathcal{L}$ 上の関数で，さらに以下に定める "項の解釈", "タルスキの真理定義" をみたす関数 $\bar{v}$(単に v で書くことある)

- $\bar{v} : \mathcal{T}_M \to M$
- $\bar{v} : \mathcal{S}_M \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$

を付随する．

構造に関する記法

以下の記法/用法もよく用いる．

- M は $\mathcal{M}$ の領域，宇宙 (universe) などと呼ばれる．

$$M = |\mathcal{M}|$$

  とも表す．また $\mathcal{M}$ と M を同一視し，単に

$$\mathcal{M} = (M, \dots)$$

  などと書いて $\mathcal{L}$-構造を指すことも多い．

- $c \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{F}$, $R \in \mathcal{R}$ に対し，
  $v(c) = c^{\mathcal{M}}$, $v(f) = f^{\mathcal{M}}$, $v(R) = R^{\mathcal{M}}$ などと表す．
  これにより $\mathcal{L} = (c, \dots; f, \dots; R, \dots)$ に対して

$$\mathcal{M} = (M; c^{\mathcal{M}}, \dots; f^{\mathcal{M}}, \dots; R^{\mathcal{M}}, \dots)$$

  などと書いて v は直接表に出さないことが多い．

$\mathcal{L}$-構造における解釈

$\mathcal{L}$-論理式の意味を解釈できる $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ が与えられると,

- 各 $\mathcal{L}$-項の解釈が自然に定まる.
  - 自由変数を持たない項 (閉項) は $|\mathcal{M}|$ の元を表す.
  - 一般の項は自由変数を入力に持つ関数のように振る舞う.
- 各 $\mathcal{L}$-論理式の解釈が自然に定まる.
  - $\forall x \dots$ を “$|\mathcal{M}|$ 上の全ての x に対して…”
  - $\exists x \dots$ を “ある $|\mathcal{M}|$ の元 x が存在して…” と読む.
- よって各 $\mathcal{L}$-文の真偽が自然に定まる.

$\mathcal{L}$-構造における解釈

Example

$\mathcal{L} = (c, d; f, g; R)$ に対し，$\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M} = (\mathbb{N}; 0, 1; +, \times; \leq)$ を考えると

- 項 $f(d, f(d, f(d, d)))$ の解釈は「4」
- 論理式 $R(f(x, d), d)$ の解釈は「$x + 1 \leq 1$」
- 文 $\varphi \equiv \forall x \forall y (g(x, (f(y, d))) = f(x, g(x, y)))$ の解釈は「どんな $x, y \in \mathbb{N}$ についても $x \times (y + 1) = x + (x \times y)$」
  - したがって φ は $\mathcal{M}$ で "真/**T**"（これを $\mathcal{M} \models \varphi$ と書く）
- 文 $\psi \equiv \forall x \exists y (g(y, y) = x)$ の解釈は「どんな $x \in \mathbb{N}$ についてもある $y \in \mathbb{N}$ が存在して $y \times y = x$」
  - したがって ψ は $\mathcal{M}$ で "偽/**F**"

Example

$\mathcal{L} = (\emptyset; \emptyset; \emptyset)$ とし, $\mathcal{M} = (M; \ ; \ ; \ )$ を $\mathcal{L}$-構造とする.

- 文 $\forall x \forall y \forall z (x = y \vee y = z \vee x = z)$ はどんなときに真か?

項の解釈

定義 ($\mathcal{L}_M$, 項の解釈)

$\mathcal{M} = (M, v)$ を $\mathcal{L}$-構造とする．

1. $\mathcal{L}_M = (\mathcal{C} \cup M, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ とする．$\mathcal{L}_M$-項を次で定める．
   - $\mathcal{C}$ の元，M の元，変数記号は $\mathcal{L}_M$-項である．
   - $t_1, \dots, t_n$ が $\mathcal{L}_M$-項，f が $\mathcal{L}$ に含まれる n 変数関数記号のとき，$f(t_1, \dots, t_n)$ は $\mathcal{L}_M$-項である．

   また，$\mathcal{L}_M$-閉項全体を $\mathcal{T}_M$ で表す．
2. $\mathcal{L}_M$-閉項の解釈 $\bar{v} : \mathcal{T}_M \to M$ を次で定める．
   - $c \in \mathcal{C}$ について $\bar{v}(c) = v(c) = c^{\mathcal{M}}$.
   - $a \in M$ について $\bar{v}(a) = a$.
   - $f \in \mathcal{F}$ が n 変数関数記号，$t_1, \dots, t_n$ が $\mathcal{L}_M$-閉項のとき
   $$\bar{v}(f(t_1, \dots, t_n)) = v(f)(\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_n)).$$

$\bar{v}(t)$ は $t^{\mathcal{M}}$ とも書く．このとき最後の条件は
$(f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}})$.

タルスキの真理定義

定義 (タルスキの真理定義)

$\mathcal{M} = (M, v)$ を $\mathcal{L}$-構造とする.

1. $\mathcal{L}_M$-論理式 : $\mathcal{L}$-論理式の $\mathcal{L}$-項を $\mathcal{L}_M$-項に置き換えたもの.
   $\mathcal{S}_M$: $\mathcal{L}_M$-文 ($\mathcal{L}_M$-閉論理式) 全体の集合.
2. $\bar{v} : \mathcal{S}_M \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ を次で定める（タルスキの真理定義という）.

$$
\begin{aligned}
\bar{v}(t = s) = \mathbf{T} &\Leftrightarrow t^{\mathcal{M}} = s^{\mathcal{M}} \\
\bar{v}(R(t_1, \ldots, t_n)) = \mathbf{T} &\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}} \\
\bar{v}(\psi_1 \wedge \psi_2) = \mathbf{T} &\Leftrightarrow \bar{v}(\psi_1) = \mathbf{T} \text{ かつ } \bar{v}(\psi_2) = \mathbf{T} \\
\bar{v}(\psi_1 \vee \psi_2) = \mathbf{T} &\Leftrightarrow \bar{v}(\psi_1) = \mathbf{T} \text{ または } \bar{v}(\psi_2) = \mathbf{T} \\
\bar{v}(\psi_1 \to \psi_2) = \mathbf{T} &\Leftrightarrow \bar{v}(\psi_1) = \mathbf{F} \text{ または } \bar{v}(\psi_2) = \mathbf{T} \\
\bar{v}(\neg\psi) = \mathbf{T} &\Leftrightarrow \bar{v}(\psi) = \mathbf{F} \\
\bar{v}(\forall x\psi) = \mathbf{T} &\Leftrightarrow \text{全ての } a \in M \text{ について } \bar{v}(\psi[a/x]) = \mathbf{T} \\
\bar{v}(\exists x\psi) = \mathbf{T} &\Leftrightarrow \text{ある } a \in M \text{ が存在して } \bar{v}(\psi[a/x]) = \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

充足関係

- $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{T}$ であることを
$$\mathcal{M} \models \varphi,$$
$\bar{v}(\varphi) = \mathbf{F}$ であることを
$$\mathcal{M} \not\models \varphi$$
で表すことも多い．
- $\models$ は充足関係と呼ばれる．
- このスライドでも $\bar{v}$ は表に出さずに以降この記法を用いる．
- $\bar{v}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{M}}$ などとも書くこともあるが，$\mathcal{M} \models \ldots$ の記法が多く使われる．
- 真理条件は閉論理式に対して定義されるが，一般の論理式に対しては，その全称閉包を取って真偽を定める．

充足可能性と恒真性

定義 (充足可能性 satisfiability)

$\mathcal{L}$-文 φ が充足可能 (satisfiable) とは，ある $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ が存在して，

$$\mathcal{M} \models \varphi$$

となることである．

定義 (恒真性 validity)

$\mathcal{L}$-文 φ が恒真 (valid) とは，任意の $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ に対して，

$$\mathcal{M} \models \varphi$$

となることである．

命題論理の時とは異なり，与えられた $\mathcal{L}$-文の充足可能性や恒真性は簡単には判断できない．

充足可能性と恒真性

$\mathcal{L} = (c, d; f, g; R)$ とする.
(f, g は 2 変数関数記号, R は 2 項関係記号)

Example

$\mathcal{L}$-文 $\forall x \forall y(f(x, y) = f(y, x))$ は

- $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M} = (\mathbb{N}; 0, 1; +, \times; \leq)$ で真, よって充足可能である.
- しかし恒真ではない.

Example

$\mathcal{L}$-文 $\forall x \forall y(x = y \to f(x, d) = f(y, d))$ は恒真である.

Example

$\mathcal{L}$-文 $\neg(c = d) \land (\forall x \forall y(x = y))$ は充足不可能である.

理論とモデル

定義 (理論)

$\mathcal{L}$-(閉) 論理式の集合 Γ を $\mathcal{L}$-理論という.

定義 (理論のモデル)

理論 Γ に対し，任意の $\varphi \in \Gamma$ に対して $\mathcal{M} \models \varphi$ であるとき $\mathcal{M}$ を Γ のモデルである，といい，

$$\mathcal{M} \models \Gamma$$

で表す.

定義

$\mathcal{L}$-論理式 φ が $\mathcal{L}$-理論 Γ で恒真 ($T \models \varphi$ で表す) とは，任意の Γ のモデル $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M} \models \varphi$ となることである.

理論の例

Example

$\mathcal{L}_G = \{e, \cdot\}$ とする．（ただし e は定数記号，$\cdot$ は 2 変数関数記号）
群の理論 G は次の $\mathcal{L}_G$-論理式の全称閉包で与えられる．

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
2. $x \cdot e = x \wedge e \cdot x = x$
3. $\exists y (y \cdot x = e \wedge x \cdot y = e)$

$\mathcal{M} = (M; e^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}})$ が理論 G のモデルであるとき，
$\mathcal{M}$ は "群" と呼ばれる．

またこのとき，次が成り立つ．

- $G \models \forall x \forall y \forall z ((y \cdot x = e \wedge z \cdot x = e) \to y = z)$,
- $G \models \forall x \forall y (y \cdot x = e \to x \cdot y = e)$.

部分構造と拡大

定義 (部分構造/拡大)

$\mathcal{M} = (M; \dots)$, $\mathcal{N} = (N; \dots)$ を $\mathcal{L}$-構造とする．$\mathcal{M}$ が $\mathcal{N}$ の部分構造である，あるいは $\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の拡大であるとは，

$$M \subseteq N$$

であり，さらに

- 任意の $f \in \mathcal{F}$ と $a_1, \dots, a_n \in M$ について

  $$f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n)$$

  (すなわち $f^{\mathcal{N}} \upharpoonright M^n = f^{\mathcal{M}}$),
- 任意の $R \in \mathcal{R}$ と $a_1, \dots, a_n \in M$ について

  $$R^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n)$$

  (すなわち $R^{\mathcal{N}} \cap M^n = R^{\mathcal{M}}$).

部分構造と拡大

Example

- 群の理論 G のモデル $\mathcal{M}$ の部分構造 $\mathcal{N}$ は
  群の理論 G の 1,2(の全称閉包) を充足する.
  1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  2. $x \cdot e = x \wedge e \cdot x = x$
  3. $\exists y(y \cdot x = e \wedge x \cdot y = e)$
- すなわち 群の部分構造は “(部分) モノイド” になっている.

† ただし部分構造の性質は構造 (上の例では群) の表現の方法によっても変わってくる.

部分構造と拡大

Example

$\mathcal{L}'_G = \{e, \cdot, {}^\circ\}$ とし（ただし $^\circ$ は 1 変数関数記号）
理論 G' を次の全称閉包で与える．

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
2. $x \cdot e = x \wedge e \cdot x = x$
3. $x^\circ \cdot x = e \wedge x \cdot x^\circ = e$

- G' のモデルも “群” である．
- 今度は $\mathcal{M} \models G'$ で $\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の部分構造のとき，$\mathcal{N} \models G'$ となる．
- すなわち $\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}$ の部分群となる．

様々な理論のモデルやその部分構造/拡大などの性質を調べる研究は「モデル理論」と呼ばれ，数理論理学の一分野をなしている．