I211 数理論理学

横山 啓太 (y-keita@jaist.ac.jp)

第 9 回：述語論理のシーケント計算 LK

シーケント計算 LK(概略)

- 述語論理のシーケント計算 LK は，命題論理のシーケント計算 LK と同じ構造を持つ．
- 等号のための始式と量化記号のための推論規則が追加されている．

注意

- $(\forall R)$, $(\exists L)$ 規則では，適用のために変数条件 (eigenvariable condition) と呼ばれる条件が付けられている．
- これ以外の推論規則は，全て構造規則か新しい論理結合子/量化記号を導入する論理式のみに依存する．
- しかし変数条件では，下段のシーケントに現れる全ての論理式について条件をチェックしなければならない．

LK の始式と推論規則

言語 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}; \mathcal{F}; \mathcal{R})$ を一つ固定する.

LK の始式

通常の始式

$\varphi \vdash \varphi$ 　　(φ は $\mathcal{L}$-論理式)

等号に関する始式

$$\vdash t = t$$

$$t = s \vdash s = t$$

$$t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$$

$$t_1 = s_1, \dots t_n = s_n \vdash f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n)$$

$$t_1 = s_1, \dots t_n = s_n, R(t_1, \dots, t_n) \vdash R(s_1, \dots, s_n)$$

($t, s, \dots$ は $\mathcal{L}$-項, f は n 変数関数記号, R は n 項関係記号)

命題論理ど同様の始式に加えて等号の基本的な性質を反映した始式が含まれる.

LK の始式と推論規則 (続き)

LK の推論規則

構造規則

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{WL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\ (\mathrm{WR})$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{CL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\ (\mathrm{CR})$$

$$\frac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \vdash \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{EL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma}\ (\mathrm{ER})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\mathrm{cut})$$

(φ, ψ は $\mathcal{L}$-論理式, Γ, Δ は $\mathcal{L}$-論理式の有限列)

命題論理の時と全く同じ推論規則を $\mathcal{L}$-論理式に適用できる.

LK の始式と推論規則 (続き)

LK の推論規則 (続き)

論理結合子の規則

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge\mathrm{L}) \quad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\psi \wedge \varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\mathrm{R})$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta \qquad \psi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\vee\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}\ (\vee\mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \psi \vee \varphi}\ (\vee\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\rightarrow\mathrm{L}) \quad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\neg\mathrm{L}) \quad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}\ (\neg\mathrm{R})$$

(φ, ψ は $\mathcal{L}$-論理式, Γ, Δ は $\mathcal{L}$-論理式の有限列)

命題論理の時と全く同じ推論規則を $\mathcal{L}$-論理式に適用できる.

LK の推論規則 (続き)

量化記号の規則

$$\frac{\varphi[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\forall L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[y/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\ (\forall R)$$

(†) ただし $\Gamma, \Delta, \forall x\varphi$ は y を自由変数に持たない

$$\frac{\varphi[y/x], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\exists L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ (\exists R)$$

(†) ただし $\Gamma, \Delta, \exists x\varphi$ は y を自由変数に持たない

(t は $\mathcal{L}$-項, x は変数, φ は $\mathcal{L}$-論理式, Γ, Δ は $\mathcal{L}$-論理式の有限列)

(†) は変数条件 (eigenvariable condition) と呼ばれる.

変数 y が何にも依存していない「任意の元」だという条件.

LK の始式と推論規則 (まとめ)

LK の始式

- $\varphi \vdash \varphi$ (φ は論理式)
- $\vdash t = t \quad t = s \vdash s = t \quad t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$
  $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n \vdash f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$
  $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n, R(s_1, \ldots, s_n) \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$

LK の推論規則

- 構造規則（述語論理に拡張したもの）
- 論理結合子に関する推論規則（述語論理に拡張したもの）
- 量化記号に関する推論規則

$$\frac{\varphi[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\forall\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[y/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall\varphi}\ (\forall\mathrm{R})$$

$$\frac{\varphi[y/x], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\exists\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\ (\exists\mathrm{R})$$

(注 1) ($\forall$R) において y は $\Gamma, \Delta, \forall x\varphi$ に自由変数として現れない.
(注 2) ($\exists$L) において y は $\Gamma, \Delta, \exists x\varphi$ に自由変数として現れない.

LKの証明図と終式

証明 (図) とは: (複数の) 始式から始まり，推論規則に基づいたシーケントの変形を記述した (樹状) 列/図

証明された式: 証明図の最下段のシーケント (終式)

定義 (シーケント計算 LK の証明図)

LK の証明図は命題論理のときと同様に以下で与えられる.

- 始式 (のみからなる図式)π は証明図である.
  またこのとき π の終式は始式である.
- π_1, π_2 が証明図のとき，π_1(または π_1, π_2) の終式を上式とする推論規則を π_1(または π_1, π_2) の下に加えた図式 π は証明図である.
  またこのとき π の終式は新たに追加した推論規則の下式である.

定義

証明図 π の終式が $\Gamma \vdash \Delta$ であるとき π を $\Gamma \vdash \Delta$ の証明と呼ぶ.

LK における証明可能性

LK の証明図は命題論理のときと同様に定義される．

定義 (LK における証明可能性)

- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能 (provable in LK)
  $\iff \Gamma \vdash \Delta$ の証明が存在
- 論理式 φ が LK で証明可能
  $\iff$ シーケント $\vdash \varphi$ が LK で証明可能
- 論理式 φ が LK で反証可能
  $\iff$ シーケント $\vdash \neg\varphi$ が LK で証明可能
- Γ を論理式の集合，φ を論理式とする．このとき，
  φ が Γ から LK で証明可能
  $\iff$ 有限な $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ が存在して，$\Gamma_0 \vdash \varphi$ が LK で証明可能

- 「$\Gamma \vdash \Delta$ が (LK で) 証明可能」を $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ と書く．
- 「φ が Γ から LK で証明可能」を $\Gamma \vdash_{LK} \varphi$ と書く．
  (あるいは単に $\Gamma \vdash \Delta, \Gamma \vdash \varphi$ と書くこともある．)

証明可能な論理式

Example

以下は全て LK において証明可能.

1. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$
2. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$
3. $\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$
4. $\exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$
5. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
6. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$
7. $\forall x\exists y(f(x) = y)$
8. $\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge x = z \rightarrow y = z)$

LK の基本的な性質

命題論理のシーケント計算 LK と同様に，次の性質が成り立つ．

定理 (演繹定理)

次は同値.

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ は LK で証明可能.
2. $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ は LK で証明可能.

定理

Γ を論理式の集合，φ を論理式とする．このとき，次が成り立つ．

1. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \varphi$.
2. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \neg\varphi$.
3. Γ が矛盾 $\Leftrightarrow$ ある論理式 ψ について $\Gamma \vdash_{LK} \psi$ かつ $\Gamma \vdash_{LK} \neg\psi$
$\Leftrightarrow \Gamma$ は LK において全ての論理式を証明する.

このように証明可能性のみについて議論をするとき，言語 $\mathcal{L}$ が何かや ($\mathcal{L}$-) 論理式が自由変数を含むかどうかは特に問題にならない．

述語論理における LK の完全性定理

定理 (完全性定理 completeness theorem)

Γ を $\mathcal{L}$-理論, φ を $\mathcal{L}$-文とする．このとき

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \varphi.$$

すなわち，次の二つが成り立つ．

1. 健全性定理 *soundness theorem:*
   $\Gamma \vdash \varphi$ が *LK* で証明可能ならば $\Gamma \models \varphi$.
2. 完全性定理 *completeness theorem:*
   $\Gamma \models \varphi$ ならば $\Gamma \vdash \varphi$ が *LK* で証明可能.

系 (完全性定理)

$\mathcal{L}$-文 φ について次は同値である．

1. φ は恒真である．
2. φ は *LK* で証明可能である．

Γ や φ を閉論理式 (の集合) に限っていることに注意.