I211 数理論理学, レポート問題

横山啓太

いずれの問題も、文献等を調べたり、他人と相談して解答しても良い。ただし、その場合には参考文献等 (web 上の情報を含む) や協力者名をはっきりと明示した上で、内容を理解し自分の言葉で記述すること。また、必要に応じて一部を直接引用しても良いが、引用箇所を明示のこと。以上に違反したレポートは採点されない。

Q 101. 講義における命題論理についての LK の完全性定理/カット除去定理の証明を以下の手順で完成させよ。

シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が LK-(cut) で証明できないとする。このとき証明探索により、$\Gamma \subseteq \bar{\Gamma}$ かつ $\Delta \subseteq \bar{\Delta}$ であるようなシーケント $\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ で

- open (すなわち $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Delta} = \emptyset$), かつ
- 分解について極大 ($\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ に分解の規則を適用すると上式の一方が $\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ に一致する)

を満たすものが存在する。このとき、

(1) 論理式の集合の組 $\bar{\Gamma}, \bar{\Delta}$ が次を満たすことを示せ。

- $\varphi \wedge \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi, \psi \in \bar{\Gamma}$ (($\wedge$L') に対応)
- $\varphi \vee \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ または $\psi \in \bar{\Gamma}$ (($\vee$L) に対応)
- $\varphi \to \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\psi \in \bar{\Gamma}$ または $\varphi \in \bar{\Delta}$ (($\to$L) に対応)
- $\neg\varphi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi \in \bar{\Delta}$ (($\neg$L) に対応)
- $\varphi \wedge \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Delta}$ または $\psi \in \bar{\Delta}$ (($\wedge$R) に対応)
- $\varphi \vee \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi, \psi \in \bar{\Delta}$ (($\vee$R') に対応)
- $\varphi \to \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ かつ $\psi \in \bar{\Delta}$ (($\to$R) に対応)
- $\neg\varphi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ (($\neg$R) に対応)

$\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ の左辺に原始論理式として現れる命題変数にすべて $\mathbf{T}$ を割り当て、他の命題変数にすべて $\mathbf{F}$ を割り当てる (従って右辺に現れる命題変数は全て $\mathbf{F}$ を割り当てる) 付値関数 v を考える。このとき、

(2) そのような付値関数 v はただ一つ存在することを示せ。

(3) 付値関数 v は左辺に現れる論理式の真理値をすべて $\mathbf{T}$、右辺に現れる論理式の真理値をすべて $\mathbf{F}$ にすることを論理式に現れる論理結合子の数に関する帰納法で示せ。
(Hint: まず命題変数の場合 (結合子 0) で正しいことを確認し、次に論理結合子ごとに上の性質を用いて確認する。)

(4) 以上を用いて $\Gamma \not\models \Delta$ を示せ。

したがって、$\Gamma \models \Delta$ であれば $\Gamma \vdash \Delta$ が LK-(cut) で証明可能であることが示された。

以降についてはいずれか 0–3 問を自由に選択して解答して良い。

Q 102 (エルブランの定理)**.** $\mathcal{L} = \{c, f, R\}$ (ただし c は定数記号、f は 1 変数関数記号、R は 1 項関係記号) とする。$\mathcal{T}$ を $\mathcal{L}$-閉項の集合、すなわち $\mathcal{T} = \{c, f(c), f(f(c)), \dots\}$ とする。

(1) $\mathcal{M} = (M; c^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}})$ を $\mathcal{L}$-構造とする。このとき $\mathcal{T}^{\mathcal{M}} = \{t^{\mathcal{M}} \in M : t \in \mathcal{T}\}$ は $\mathcal{M}$ の部分構造をなすことを示せ。

(2) ψ を量化記号を持たない $\mathcal{L}$-文とする。このとき $\mathcal{M} \models \psi$ ならば $\mathcal{T}^{\mathcal{M}} \models \psi$ を示せ。

φ を量化記号を含まない論理式で x のみを自由変数として持つとする。このとき次の (i),(ii) が同値であることを示す。

(i) $\exists x \varphi$ が LK で証明可能.

(ii) 有限個の $\mathcal{L}$-閉項 $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ が存在して $\bigvee_{1 \leq i \leq n} \varphi[t_i/x]$ が LK で証明可能.

(3) (ii)⇒(i) を示せ。

(4) (ii) が成り立たないと仮定する。このとき $\Gamma = \{\neg\varphi[t/x] : t \in \mathcal{T}\}$ が無矛盾であることを示せ。

(5) 4 で定めた Γ が無矛盾であるとき、完全性定理により $\mathcal{M} \models \Gamma$ をとる。すると $\mathcal{T}^{\mathcal{M}} \models \Gamma$、したがって任意の $a \in \mathcal{T}^{\mathcal{M}}$ について $\mathcal{T}^{\mathcal{M}} \models \neg\varphi[a/x]$ であることを示せ。

(6) (i)⇒(ii) を示せ。

Q 103. Q 102.4 で定めた Γ に対し、次の 2 条件を満たす $\mathcal{L}$-論理式の集合 $\bar{\Gamma}$ が存在することを示せ。

- $\Gamma \subseteq \bar{\Gamma} \subseteq \Pi$ かつ $\bar{\Gamma}$ は無矛盾, ただし Π は量化記号を含まない $\mathcal{L}$-文全体の集合.
- すべての $A \in \Pi$ について $A \in \bar{\Gamma}$ または $\neg A \in \bar{\Gamma}$.

Hint: Π の元を一列に並べ上げ、Γ に Π の元またはその否定を追加していく。
また、この $\bar{\Gamma}$ を用いて Q 102.5 の完全性定理を使わない証明を与えよ。(φ が等号を含まない場合のみを考えても良い。)

Q 104. Q 102 において φ が量化記号を含む場合には (i),(ii) の同値性は成立しない。反例を挙げよ。

Q 105 (述語論理におけるクレイグの補間定理)**.** $\mathcal{L} = \{R_1, R_2, S\}$ (いずれも 1 項関係記号) とする。次にあげる前原の補題を用い、以下の述語論理におけるクレイグの補間定理 (の特別な場合) を証明せよ。

補題 (前原の方法)**.** シーケント $\Gamma_1\Gamma_2 \vdash \Delta_1\Delta_2$ が LK-(cut) で証明可能とし、また Γ_1, Δ_1 に含まれる $\mathcal{L}$-論理式は記号 R_2 を含まず、Γ_2, Δ_2 に含まれる $\mathcal{L}$-論理式は記号 R_1 を含まないとする。($\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2$ はいずれも空でも良い。) このとき、R_1, R_2 をともに含まない $\mathcal{L}$-論理式 θ が存在して次の両方を満たす。

- $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \theta$ が LK で証明可能.
- $\Gamma_2, \theta \vdash \Delta_2$ が LK で証明可能.

クレイグの補間定理
$\mathcal{L}$-文 $\forall x(\varphi \to \psi)$ が LK で証明可能とし、φ は R_2 を含まない $\mathcal{L}$-論理式、ψ は R_1 を含まない $\mathcal{L}$-論理式とする。このとき、R_1, R_2 をともに含まない $\mathcal{L}$-論理式 θ が存在して $\forall x(\varphi \to \theta)$ および $\forall x(\theta \to \psi)$ がともに LK で証明可能となる。

これを以下の手順で示せ。

(1) シーケント $\varphi[z/x] \vdash \psi[z/x]$ が LK で証明可能なことを示せ。

(2) カット除去定理、および上記の補題を用いて次を示せ。R_1, R_2 をともに含まず、さらに x 以外の自由変数を持たない $\mathcal{L}$-論理式 θ が存在して
- $\varphi[z/x] \vdash \theta[z/x]$ が LK で証明可能.
- $\theta[z/x] \vdash \psi[z/x]$ が LK で証明可能.

(3) 2 で得られた θ について $\forall x(\varphi \to \theta)$ および $\forall x(\theta \to \psi)$ がともに LK で証明可能であることを示せ。

Q 106 (コンパクト性定理の応用)**.** $\mathcal{L} = \{e, \cdot\}$ とする。有限群の理論、すなわち次 (i)(ii) をみたすような理論 T は存在しないことを証明せよ。

(i) $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ が T のモデルであれば、$\mathcal{M}$ は有限群である。

(ii) $\mathcal{M}$ が有限群であれば、$\mathcal{M}$ は T のモデルである。

Hint: T を (i),(ii) を満たす $\mathcal{L}$-理論とし、φ_n を “n 個以上の元が存在する” ことを主張する $\mathcal{L}$-文とする。このとき、$T + \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ が充足的かを考えてみよ。