I211 数理論理学 講義ノート

横山啓太

2020 年 10 月 13 日 ～

This version: November 23, 2020

1　命題論理

注意: 以下，記号 $\leftrightarrow$ は論理式に現れる省略記号 (以下で定義する) の意味のみで用いる．一方，$(*) \Leftrightarrow (**)$ は単に「$(*)$ と $(**)$ は同値である」という主張を表すこととする．また，記号列 φ と ψ が同じことを $\varphi \equiv \psi$ で表す.

1.1　命題論理の論理式

定義 1.1 (命題論理の言語). 命題論理の言語は次よりなる.

- 原始命題/命題変数: $p, q, r, \ldots$
- 命題定数: $\top, \bot$
- 論理積, conjunction (かつ): $\wedge$
- 論理和, disjunction (または): $\vee$
- 含意, implication (ならば): $\rightarrow$
- 否定, negation (でない): $\neg$

他に必要に応じて括弧 (,) を用いる．(命題定数は用いないこともある．)

命題論理の論理式は命題論理の言語 (記号) の所定の形の有限列として与えられる.

定義 1.2 (論理式). 次により与えられる命題論理の言語の記号列を命題論理の論理式という.

- 原子命題および命題定数は論理式である.(特に原子論理式とも呼ばれる.)
- φ, ψ が論理式であるとき,$\neg(\varphi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \to (\psi)$ は論理式である.

また,原始論理式とその否定を合わせてリテラルという.

命題論理の論理式は $\varphi, \psi, \eta, \theta, \ldots$ や $A, B, C, \ldots$ で表すことが多い.補足として,次のルールにより論理式の記述をやや簡略化する.

- $\varphi \leftrightarrow \psi$ を $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ の略記として用いる.
- 論理結合子は $\{\neg\}$, $\{\wedge, \vee\}$, $\{\to, \leftrightarrow\}$ の順で優先的に適用するとし,それに応じて混乱の無い範囲で括弧を省略する.
- (命題定数を用いない場合は,) 原始命題 q を一つ取り,$\bot, \top$ をそれぞれ $q \wedge \neg q$, $q \vee \neg q$ の略記とする.簡単のため,$\bot, \top$ に用いる原始命題は他では用いないこととする.

定義 1.3 (代入). 論理式 φ に現れる全ての原始命題 p を論理式 ψ で置き換えた論理式を $\varphi[\psi/p]$ で表す.(注意: ここでは p や ψ を単なる記号/記号列と見ている.)

定理 1.1. φ, ψ が論理式であるとき $\varphi[\psi/p]$ は論理式である.

Proof. 論理式に現れる論理結合子の数に関する帰納法. □

定義 1.4 (部分論理式). φ を論理式とする.このとき φ の部分論理式を次で定める.

- φ は φ の部分論理式である.
- ψ が φ の部分論理式であり,さらに $(\theta_1) * (\theta_2)$ の形 (ただし $*$ は $\wedge, \vee, \to$ のいずれか) であるとき θ_1, θ_2 は φ の部分論理式である.
- ψ が φ の部分論理式であり,さらに $\neg(\theta)$ の形のとき θ は φ の部分論理式である.

1.2　命題論理の意味論

以下，命題論理の論理式全体の集合を PROP で表すことにする．また，論理式の真，偽を表す値を $\mathbf{T}, \mathbf{F}$ で表すこととする．

定義 1.5 (付値関数，真理値)**.** 次を満たす関数 $v : \mathrm{PROP} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ を付値関数という．

　任意の論理式 φ に対して

- $v(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow v(\psi) = \mathbf{T}$ かつ $v(\eta) = \mathbf{T}$　($\varphi \equiv \psi \wedge \eta$ のとき)
- $v(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow v(\psi) = \mathbf{T}$ または $v(\eta) = \mathbf{T}$ ($\varphi \equiv \psi \vee \eta$ のとき)
- $v(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow v(\psi) = \mathbf{F}$ または $v(\eta) = \mathbf{T}$ ($\varphi \equiv \psi \to \eta$ のとき)
- $v(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow v(\psi) = \mathbf{F}$ ($\varphi \equiv \neg\psi$ のとき)
- $v(\top) = \mathbf{T}$, $v(\bot) = \mathbf{F}$

付値関数 v が与えられたとき論理式 φ の v による値 $v(\varphi)$ を φ の v による真理値 (あるいは付値) と呼ぶ．

定理 1.2. v, v' を付値関数とする．このとき論理式 φ に現れる任意の原始命題 p について $v(p) = v'(p)$ であれば，$v(\varphi) = v'(\varphi)$.

Proof. 論理式に現れる論理結合子の数に関する帰納法．　□

　したがって，論理式に現れる全ての原始命題の真理値が決まれば，論理式の真理値も決まることになる．これを元に，与えられた論理式に対し，その論理式 (および部分論理式) が取り得る真理値を全て書き表した表を真理値表という．例えば，論理式 $\neg p \wedge q \to (q \to p)$ とその部分論理式の真理値表は次のようになる．

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$q \to p$	$\neg p \wedge q \to (q \to p)$
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**

定義 1.6. 命題論理の論理式 φ について，φ が恒真，充足可能，充足不可能を次で定める．

- φ が恒真 (valid)$\Longleftrightarrow$ 任意の付値 v について $v(\varphi) = \mathbf{T}$.

- φ が充足可能 (satisfiable)$\Longleftrightarrow$ ある付値 v について $v(\varphi) = \mathbf{T}$.
- φ が充足不可能 (unsatisfiable)$\Longleftrightarrow$ φ は充足可能でない
  $\Longleftrightarrow$ 任意の付値 v について $v(\varphi) = \mathbf{F}$.

定理 1.3. φ が恒真 $\Longleftrightarrow$ $\neg\varphi$ は充足不可能.

定義 1.7 (充足関係)**.** 論理式の集合 Γ, Δ と論理式 φ に対し充足関係 $\models$ を次で定める.

- $\Gamma \models \varphi \Longleftrightarrow$ 任意の付値関数 v に対して,「すべての $\psi \in \Gamma$ に対して $v(\psi) = \mathbf{T}$ であれば $v(\varphi) = \mathbf{T}$」.
- $\Gamma \models \Delta \Longleftrightarrow$ ある論理式 $\eta \in \Delta$ に対して $\Gamma \models \eta$.

定義 1.8. 論理的同値論理式 φ, ψ が論理的同値とは $\{\varphi\} \models \psi$ かつ $\{\psi\} \models \varphi$, すなわち任意の付値関数 v に対して $v(\varphi) = v(\psi)$ が成り立つことである.

定理 1.4. 論理式 φ と ψ が論理的同値 $\Leftrightarrow$ 論理式 $\varphi \leftrightarrow \psi$ が恒真.

演習 1.1. 定理 1.3,1.4 を証明せよ.

補題 1.5. v を付値関数, φ, ψ_1, ψ_2 を論理式とする. このとき次が成り立つ.

$$v(\psi_1) = v(\psi_2) \Rightarrow v(\varphi[\psi_1/p]) = v(\varphi[\psi_2/p]).$$

Proof. (アイデア): ψ_i を一つの原始命題のように扱えば良い.
証明は論理式 φ の構成に関する帰納法. □

定理 1.6. φ, ψ_1, ψ_2 を論理式とする. このとき ψ_1, ψ_2 が論理的同値であれば, $\varphi[\psi_1/p]$ と $\varphi[\psi_2/p]$ も論理的に同値である.

定理 1.7. φ, ψ を論理式とする. このとき φ が恒真ならば $\varphi[\psi/p]$ も恒真である.

Proof. v を任意にとる. 新しい付値 v' を $v'(p) = v(\psi)$, $v'(q) = v(q)$ ($q \neq p$ のとき) と定める. このとき上の補題より $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$ である. φ は恒真なので $v'(\varphi) = \mathbf{T}$, よって $v(\varphi[\psi/p]) = \mathbf{T}$. □

演習 1.2. 恒真の代わりに充足可能を考えると, 上の定理は正しくない. 反例を上げよ.

定理 1.8 (重要な論理的同値/恒真論理式)**.** 以下は全て恒真.

1. $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$.
2. 交換法則 (commutativity): $\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$.
3. 交換法則: $\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$.
4. 結合法則 (associativity): $(\varphi \wedge \psi) \wedge \eta \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \eta)$.
5. 結合法則: $(\varphi \vee \psi) \vee \eta \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \eta)$.
6. 分配法則 (distributivity): $(\varphi \wedge \psi) \vee \eta \leftrightarrow (\varphi \vee \eta) \wedge (\psi \vee \eta)$.
7. 分配法則: $(\varphi \vee \psi) \wedge \eta \leftrightarrow (\varphi \wedge \eta) \vee (\psi \wedge \eta)$.
8. ドモルガンの法則 (de Morgan's law): $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
9. ドモルガンの法則: $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.
10. 二重否定の除去: $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$.

Γ を論理式の有限列 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ とする．このとき，

- $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \equiv \bigwedge \Gamma \equiv ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \cdots \wedge \varphi_n$,
- $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i \equiv \bigvee \Gamma \equiv ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \cdots \vee \varphi_n$,

と定める．

定義 1.9. Γ_i $(1 \leq i \leq n)$ をリテラルの集合とするとき，次の形の論理式を選言標準形，連言標準形の論理式という．

- 連言標準形: $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee \Gamma_i$.
- 選言標準形: $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge \Gamma_i$.

定理 1.9. 任意の論理式は連言標準形の論理式および選言標準形の論理式と論理的同値である．

上の定理により得られる φ と同値な連言標準形/選言標準形の論理式を φ の連言標準形/選言標準形という．ただし「標準形」という名前だが φ の連言標準形や選言標準形は一つには定まらないことに注意．

1.3　命題論理のシーケント計算 LK

- Γ, Δ を論理式の有限列とするとき，記号列 $\Gamma \vdash \Delta$ をシーケントという．(区切りの記号 $\vdash$ は turnstile などと呼ばれる．)

シーケント計算 LK とは，シーケントを一定の規則により並べた列 (あるいは樹状図) により与えられる命題論理の証明体系である．

定義 1.10 (シーケント計算 LK). LK は次の要素から構成される．

- 始式 initial sequent: $\varphi \vdash \varphi$ の形のシーケント，ただし φ は論理式

- 推論規則 inference rules: 推論規則表を参照 (上段を上式 (1 個か 2 個)，下段を下式 (必ず 1 個) と呼ぶ)

  - 構造規則 structural rules
  - 論理結合子の規則 rules for logical connectives

  注意: 推論規則 (cut) で消すことができる論理式は "1 つだけ" である．(繰り返して起用しても 2 つ以上の論理式を同時に消すことはできない．) 間違いやすいので要注意.

(複数の) 始式から始まり，推論規則に基づいたシーケントの変形を記述した (樹状) 列/図を LK の証明図 (あるいは単に証明) という．証明図の最下段のシーケントを終式という．よりフォーマルには以下の通り．

定義 1.11 (シーケント計算 LK の証明図). LK の証明図は以下で与えられる．

- 始式 (のみからなる図式)π は証明図である．またこのとき π の終式は始式である．

- π_1, π_2 が証明図のとき，π_1(または π_1, π_2) の終式を上式とする推論規則を π_1(または π_1, π_2) の下に加えた図式 π は証明図である．またこのとき π の終式は新たに追加した推論規則の下式である．

定義 1.12 (LK における証明可能性).

- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が LK において証明可能 (provable in LK) とは $\Gamma \vdash \Delta$ を終式に持つ LK の証明図が存在することである．
  （ややこしいが「$\Gamma \vdash \Delta$ が (LK で) 証明可能」を $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ や，場合によっては単に $\Gamma \vdash \Delta$ と書くこともある.）

- 論理式φがLKで証明可能とはシーケント$\vdash \varphi$がLKで証明可能なことである．

- 論理式φがLKで反証可能とはシーケント$\neg\varphi$がLKで証明可能なことである．

- Γを論理式の集合，φを論理式とするとき，φがΓからLKで証明可能(これも$\Gamma \vdash_{LK} \varphi$とも書く)とは，$\Gamma$の元からなる論理式の有限列$\Gamma_0$が存在して，$\Gamma_0 \vdash \varphi$がLKで証明可能なことである．

定理 1.10 (演繹定理)**.** 次は同値.

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$はLKで証明可能.

2. $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$はLKで証明可能.

Proof. $1 \Rightarrow 2$は推論規則($\to$R)より容易に分かる．

$2 \Rightarrow 1$のためにはまず$\Gamma, \varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$が証明可能であることを示す．そして$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$を終式にもつ証明図と$\Gamma, \varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$を終式に持つ証明図に推論規則(cut)を適用する． □

以下$\Gamma \vdash_{LK}$　(右辺は空列)を$\Gamma \vdash_{LK} \bot$とも書くことにする．($\bot$を命題定数とみて，weakeningしたと思っても良い．)

定義 1.13. Γを論理式の集合とする．

- ある有限列$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$について$\Gamma_0 \vdash_{LK} \bot$のとき$\Gamma$は矛盾するという．

- Γが矛盾しないときΓは無矛盾であるという．

定理 1.11. Γを論理式の集合，φを論理式とする．このとき次が成り立つ．

1. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \varphi$.

2. $\Gamma \cup \{\varphi\}$が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \neg\varphi$.

3. Γが矛盾 $\Leftrightarrow$ ある論理式ψについて$\Gamma \vdash \psi$ かつ $\Gamma \vdash \neg\psi$
   $\Leftrightarrow$ ΓはLKにおいて全ての論理式を証明する.

1.4 完全性定理

定理 1.12 (完全性定理 completeness theorem)**.**

$$\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LK} \Delta.$$

すなわち，次の二つが成り立つ．

1. 健全性定理 soundness theorem: $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能ならば $\Gamma \models \Delta$.
2. 完全性定理 completeness theorem: $\Gamma \models \Delta$ ならば $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能.

系 1.13 (完全性定理)**.** 論理式 φ について次は同値である．

1. φ は恒真である．
2. φ は LK で証明可能である．

より一般に次も成り立つ．Γ を論理式の集合 (無限でも良い)，φ を論理式とするとき次は同値である．

1. $\Gamma \models \varphi$.
2. φ は Γ から LK で証明可能である．

完全性定理を用いると，証明 (不) 可能性，充足 (不) 可能性，恒真性は次のように言い換えられる．

- φ が恒真 iff φ は証明可能 iff $\neg\varphi$ は充足不可能
- φ が充足可能 iff $\neg\varphi$ は恒真でない iff $\neg\varphi$ は証明不可能
- $\neg\varphi$ が充足可能 iff φ は恒真でない iff φ は証明不可能
- φ が充足不可能 iff $\neg\varphi$ は恒真 iff φ は反証可能

Γ を論理式の集合とする．このとき，Γ が充足可能とは Γ の全ての論理式の真理値を同時に $\mathbf{T}$ にするような付値関数が存在することである.（この定義は Γ が無限の時にも使える.）すると，定理 1.11 により完全性定理は次の形でも表現できる．次の定理は Γ が無限でも成り立つ．

定理 1.14 (完全性定理 (別表現))**.**

$$\Gamma \text{は無矛盾} \Leftrightarrow \Gamma \text{は充足可能}.$$

系 1.15 (コンパクト性定理)**.**

$$\Gamma \text{の任意の有限部分集合は充足可能} \Leftrightarrow \Gamma \text{は充足可能}.$$

1.5　LK の健全性の証明

この節では次の LK の健全性の証明を見る．

定理 1.16.

$$\Gamma \vdash_{LK} \Delta \Rightarrow \Gamma \models \Delta.$$

Proof. シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能とする．このとき，証明図に現れる各シーケントについて

(∗) 任意の付値 v について

$$v(\bigwedge \Gamma) = \mathbf{T} \Longrightarrow v(\bigvee \Delta) = \mathbf{T}$$

が成り立つことを証明図の構成に関する帰納法で示す．すなわち

- 始式で (∗) が成り立つ，
- 各推論規則において，上段で (∗) が成り立てば，下段でも (∗) が成り立つ，

ことを示せば良い．

このことを以下の手順で確認する．

- 始式は $\varphi \vdash \varphi$ の形であるので，(∗) が成り立つことは自明．
- (cut) 以外の構造規則についても上段で (∗) が成り立てば，下段でも (∗) が成り立つことは比較的容易に分かる．
- (cut) および論理結合子の規則に関して一つ一つ確認する．

(→R) のとき

$\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta$ について (∗) が成り立つとする．(このとき $\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Delta$ について (∗) が成り立つことを示せば良い．) 今，付値関数 v を任意に取り，$v(\bigwedge \Gamma) = \mathbf{T}$ とする．$v(\varphi) = \mathbf{T}$ かどうかで場合分けをする．もし，$v(\varphi) = \mathbf{T}$ であれば，$v(\varphi \wedge \bigwedge \Gamma) = \mathbf{T}$ である．よって仮定より $v(\psi \vee \bigvee \Delta) = \mathbf{T}$ となる．このとき $v(\psi) = \mathbf{T}$ または $v(\bigvee \Delta) = \mathbf{T}$ となり，よって $v(\varphi \to \psi) = \mathbf{T}$ または $v(\bigvee \Delta) = \mathbf{T}$ のいずれかが成り立つ．一方，$v(\varphi) = \mathbf{F}$ であれば，$v(\varphi \to \psi) = \mathbf{T}$ である．いずれの場合でも，$v((\varphi \to \psi) \vee \bigvee \Delta) = \mathbf{T}$ と分かった．

(∨L) のとき

$\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ および $\Gamma, \psi \vdash \Delta$ について $(*)$ が成り立つとする．(このとき $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta$ について $(*)$ が成り立つことを示せば良い．) 今，付値関数 v を任意に取り，$v(\bigwedge \Gamma \wedge (\varphi \vee \psi)) = \mathbf{T}$ とする．このとき，$v(\bigwedge \Gamma) = \mathbf{T}$ かつ $v(\varphi \vee \psi) = \mathbf{T}$ であるので，特に $v(\varphi) = \mathbf{T}$ または $v(\psi) = \mathbf{T}$ のいずれかが成り立つ．もし $v(\varphi) = \mathbf{T}$ であれば $v(\bigwedge \Gamma \wedge \varphi) = \mathbf{T}$ であるので，仮定の一つ目より $v(\bigvee \Delta) = \mathbf{T}$ である．もし $v(\psi) = \mathbf{T}$ であれば $v(\bigwedge \Gamma \wedge \psi) = \mathbf{T}$ であるので，仮定の二つ目より $v(\bigvee \Delta) = \mathbf{T}$ である．したがっていずれの場合でも $v(\bigvee \Delta) = \mathbf{T}$ と分かった．

(他のケースも各々示すことができる．) □

演習 1.3. 健全性定理の証明を完成させよ．

1.6 LK の完全性の証明

この節では LK の完全性定理の証明を見る．ここでは LK の ((cut) 規則を用いない) 証明図を探索する，と言う手法をとる．

- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ を終式に持つ LK の証明図で，推論規則 (cut) を含まない物が存在するとき，$\Gamma \vdash \Delta$ は LK-(cut) で証明可能であるという．

$\Gamma \models \Delta$ であるとき，以下のようなアイデアで $\Gamma \vdash \Delta$ を終式に持つ (cut) を含まない LK の証明図を探すことができる．この手法は証明探索 (proof search) と呼ばれる．

- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ の Γ, Δ は集合だと思って良い (exchange, contraction より)
- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が共通の論理式 $\varphi \in \Gamma \cap \Delta$ を持つとき closed と呼ぶ．そうでないとき open と呼ぶ．
- closed なシーケントは始式と思って良い (weakening を繰り返して起用することにより始式に帰着される)．
- open なシーケントに現れる論理式を一つ選び，その論理式に現れる一番外側の論理結合子に着目して，論理結合子の推論規則 (+contraction) を逆向きに適用し，下式から上式 (2 つあるかも) を作っていく．(ただし ($\wedge$R), ($\vee$L) の代わりに ($\wedge$R'), ($\vee$L') を用いるものとする．) このとき，次を満たすようにできる．
  - 上式に現れるシーケントは左辺，右辺とも下式の左辺右辺を包含する (contraction を下から上に適用することにより必要な論理式をコピーしておけば良い)

    - 上式 (2 つある場合は両方) の左辺か右辺のいずれかは下式より真に大きくなる (少なくとも一つ論理式を追加する)

  こうして作られる上式 (の組) は下式の分解と呼ばれる．(別紙推論規則表参照)

- $\Gamma \vdash \Delta$ に分解を繰り返し適用して得られる樹状図を $\Gamma \vdash \Delta$ の「分解木」と呼ぶ．($\Gamma \vdash \Delta$ の分解木は $\Gamma \vdash \Delta$ の証明図もどきだと思うことができる．)
- 分解で現れる論理式は最初のシーケントに含まれる論理式の部分論理式のみ.
- これ以上，分解ができなくなったら終わり（シーケントが全て closed になるか，どの論理結合子に規則を適用してもそれ以上論理式を増やせなくなったら終わり）.
- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ に現れる論理式の部分論理式が有限個しかなく，下から上に集合が真に大きくなっていくのでこの操作はどこかで必ずとまる．このとき，次のいずれかが起こる.
  (i) 一番上に残っているシーケントが全て closed になる．このとき，この分解木から LK のカットを使わない $\Gamma \vdash \Delta$ の証明図ができる.
  (ii) 一番上に残っているシーケントの一つで，open だがこれ以上大きくならない (分解できない) シーケントがみつかる.

$\Gamma \models \Delta$ のとき，実は (ii) は起こらない．それを示すことで完全性定理が得られる.

定理 1.17 (完全性定理，カット除去定理). 次は同値.

1. $\Gamma \vdash \Delta$ が LK-(cut) で証明可能.
2. $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能.
3. $\Gamma \models \Delta$.

Proof. $1 \to 2$ は自明，$2 \to 3$ は健全性定理であるので，$3 \to 1$ を示せば良い．対偶を示す.

シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が LK-(cut) で証明できないとする．$\Gamma \vdash \Delta$ より proof search を行い，これ以上大きくならない分解木を得る．これを Π とする．このとき，Π の一番上 (木の葉の部分) に現れるシーケントの一つは open かつ分解によりこれ以上大きくならないシーケント $\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ がみつかる．なぜなら，そうでなければ Π の葉

の部分現れるシーケントは全て closed となるので，Π を変形することで $\Gamma \vdash \Delta$ が LK-(cut) で証明可能になってしまうからである．このとき，$\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ の分解に対する極大性から，$\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$(の左辺) は以下を満たすヒンティカ集合 (Hintikka set) と呼ばれる集合になっていることが分かる．

- $\varphi \wedge \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi, \psi \in \bar{\Gamma}$ (($\wedge$L') に対応)
- $\varphi \vee \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ または $\psi \in \bar{\Gamma}$ (($\vee$L) に対応)
- $\varphi \to \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\psi \in \bar{\Gamma}$ または $\varphi \in \bar{\Delta}$ (($\to$L) に対応)
- $\neg\varphi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi \in \bar{\Delta}$ (($\neg$L) に対応)
- $\varphi \wedge \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Delta}$ または $\psi \in \bar{\Delta}$ (($\wedge$R) に対応)
- $\varphi \vee \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi, \psi \in \bar{\Delta}$ (($\vee$R') に対応)
- $\varphi \to \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ かつ $\psi \in \bar{\Delta}$ (($\to$R) に対応)
- $\neg\varphi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ (($\neg$R) に対応)

今，$\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ の左辺に原始論理式として現れる命題変数にすべて $\mathbf{T}$ を割り当て，他の命題変数にすべて $\mathbf{F}$ を割り当てる (従って右辺に現れる命題変数は全て $\mathbf{F}$ を割り当てる) 付値関数 v を考える．

- そのような付値関数 v はただ一つ存在する．
- すると，左辺に現れる論理式の真理値はすべて $\mathbf{T}$，右辺に現れる論理式の真理値はすべて $\mathbf{F}$ になっている．
  - 論理式に現れる論理結合子の数に関する帰納法による．命題変数の場合 (結合子 0) は正しいので，あとは論理結合子ごとに上の性質を用いて確認する．
- すなわち $v(\bigwedge \bar{\Gamma}) = \mathbf{T}$ かつ $v(\bigvee \bar{\Delta}) = \mathbf{F}$.
- すると $\Gamma \subseteq \bar{\Gamma}$, $\Delta \subseteq \bar{\Delta}$ なので $\Gamma \not\models \Delta$.

□

演習 1.4. 上記の証明の最後の部分 (所望の v が構成でき，$v(\bigwedge \bar{\Gamma}) = \mathbf{T}$ かつ $v(\bigvee \bar{\Delta}) = \mathbf{F}$ となること) を示し，証明を完成させよ．

1.7 カット除去定理

推論規則 (cut) の役割とは?

- 3 段論法をして良いですよ，ということ，つまり
- $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \eta$ が証明可能なら (どんな証明を経由していても)$\varphi \vdash \eta$ も証明可能.

完全性定理で見た次の同値性 (特に $2 \to 1$) はカット除去定理と呼ばれる.

定理 1.18 (カット除去定理). 次は同値.

1. $\Gamma \vdash \Delta$ が LK-(cut) で証明可能.
2. $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能.

LK の推論規則を注意深く眺めると，(cut) 以外の規則では上段に現れる論理式は全て下段に現れる論理式の部分論理式になっている．したがって，

- $\Gamma \vdash \Delta$ が LK-(cut) で証明できれば，その証明図は Γ, Δ に含まれる論理式の部分論理式しか含まない.

よってカット除去定理より次が分かる.

定理 1.19 (部分論理式の性質 (?) subformula property). シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能であれば，$\Gamma \vdash \Delta$ の証明図で Γ, Δ に含まれる論理式の部分論理式しか含まないものが存在する.

カット除去定理やこの部分論理式の性質からは様々なことが分かる.

- LK-(cut) での証明では，部分論理式の性質が成り立つため，証明の回り道が許されない.
- よって回り道を含む証明 (演繹定理や 3 段論法，矛盾を経由した証明) にカット除去定理を適用することで直接的な証明の存在が分かる.
- 証明体系の無矛盾性が分かる (LK-(cut) は仮定無しに矛盾 ($\vdash \bot$) を証明しない)
- ... (他にも色々)

次の定理では命題定数 $\bot$ を用いる．(都合の良い命題変数について $\bot \equiv p \wedge \neg p$ と考えても良い．) 任意の付値関数 v について $v(\bot) = \mathbf{F}$ が割り当てられることに注意.

定理 1.20 (クレイグの補間定理)**.** $\varphi \to \psi$ が証明可能なとき，φ, ψ に共通で現れる命題変数および命題定数のみを持つ論理式 η が存在して $\varphi \to \eta$ および $\eta \to \psi$ が証明可能になる．η は補間文と呼ばれる．

特に，φ, ψ が共通の命題変数を持たないとき，$\neg\varphi$ か ψ のいずれかが恒真である．

2　述語論理

2.1　述語論理の論理式

(一階) 述語論理では集合上の関数や関係 (述語) に関する主張を，命題論理においても用いた論理結合子，等号，および「任意」「存在」を表す量化記号と扱う対象ごとの固有の言語を用いて表現する．

定義 2.1 (述語論理の言語)．述語論理の言語は

- 変数記号: $x_0.x_1, \dots$
- 論理結合子: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$
- 量化記号: $\forall x$, $\exists x$
- 等号 (特別な 2 項関係記号): $=$

および次で与える，扱う対象に応じた固有の言語 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}; \mathcal{F}; \mathcal{R})$ よりなる．

- $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots\}$: 定数記号の集合
- $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots\}$: 関数記号の集合
- $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots\}$: 関係 (述語) 記号の集合

ただし，関数記号，関係記号にはそれぞれ引数の数 (項数, arity) が定められていることとする．定数記号は項数 0 の関数記号とみなすこともある．

言語 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}; \mathcal{F}; \mathcal{R})$ は $\mathcal{L} = (c_1, \dots; f_1, \dots; R_1, \dots)$ または単に $\mathcal{L} = (c_1, \dots, f_1, \dots, R_1, \dots)$ のように書くこともある．

以降，言語 $\mathcal{L}$ を一つ固定する．

定義 2.2 ($\mathcal{L}$-項)．言語 $\mathcal{L}$ で記述される項 ($\mathcal{L}$-項) は次で与えられる．

- 変数記号，$\mathcal{L}$ の定数記号は $\mathcal{L}$-項である．
- $t_1, \dots t_n$ が項，f が $\mathcal{L}$ に含まれる n 変数関数記号の時，$f(t_1, \dots, t_n)$ は $\mathcal{L}$-項である．

定義 2.3 (($\mathcal{L}$-) 原子論理式)．言語 $\mathcal{L}$ で記述される原子論理式 ($\mathcal{L}$-原子論理式) は次で与えられる．

- t_1, t_2 が $\mathcal{L}$-項の時，$t_1 = t_2$ は $\mathcal{L}$-原子論理式である．
- $t_1, \ldots t_n$ が項，R が $\mathcal{L}$ に含まれる n 項関係記号の時，$R(t_1, \ldots, t_n)$ は $\mathcal{L}$-原子論理式である．

定義 2.4 ($\mathcal{L}$-論理式)**.** 言語 $\mathcal{L}$ で記述される論理式 ($\mathcal{L}$-論理式) は次で与えられる．

- $\mathcal{L}$-原子論理式は $\mathcal{L}$-論理式である．
- φ, ψ が $\mathcal{L}$-論理式，x が変数記号の時，$(\varphi) \land (\psi)$, $(\varphi) \lor (\psi)$, $(\varphi) \to (\psi)$, $\neg(\varphi)$, $\forall x(\varphi)$, $\exists x(\varphi)$ は $\mathcal{L}$-論理式である．

(括弧は適宜省略する．)

命題論理の時と同様に $\varphi \leftrightarrow \psi$ は $(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$ の略記と思うこととする．結合子は通常 $\{\neg, \forall, \exists\}$, $\{\land, \lor\}$, $\{\to, \leftrightarrow\}$ の順で強く，それに応じて括弧を適宜省略する．

定義 2.5 (自由変数 FV，束縛変数 BV)**.** $\mathcal{L}$-論理式 φ の自由変数 (の集合)$\mathrm{FV}(\varphi)$，および束縛変数 (の集合) $\mathrm{BV}(\varphi)$ を次で定める．

- t が $\mathcal{L}$-項の時，$\mathrm{FV}(t)$ とは t に現れる全ての変数記号の集合である．
- φ が $\mathcal{L}$-原子論理式のとき，$\mathrm{FV}(\varphi) = \bigcup\{\mathrm{FV}(t) : t$ は φ に現れる $\mathcal{L}$-項$\}$，すなわち $\mathrm{FV}(\varphi)$ は φ に現れる全ての変数記号である．また，$\mathrm{BV}(\varphi) = \emptyset$ と定める．
- $\varphi \equiv \psi_1 \land \psi_2$, $\varphi \equiv \psi_1 \lor \psi_2$, $\varphi \equiv \psi_1 \to \psi_2$ のとき，$\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi_1) \cup \mathrm{FV}(\psi_2)$, $\mathrm{BV}(\varphi) = \mathrm{BV}(\psi_1) \cup \mathrm{BV}(\psi_2)$ と定める．また $\varphi \equiv \neg\psi$ のとき，$\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi)$, $\mathrm{BV}(\varphi) = \mathrm{BV}(\psi)$ と定める．
- x が変数記号で，$\varphi \equiv \forall x\psi$, $\varphi \equiv \exists x\psi$ のとき，$\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi) - \{x\}$, $\mathrm{BV}(\varphi) = \mathrm{BV}(\psi) \cup \{x\}$ と定める．

論理式を記述する際には変数記号を適切に置き換えることにより，$\mathrm{FV}(\varphi) \cap \mathrm{BV}(\varphi) = \emptyset$ が成り立つようにすると良い．

定義 2.6 (代入)**.** ここでは 2 種類の代入を考える．

- (命題論理式への代入): φ が命題変数 p のみをもつ命題論理の論理式とし，ψ を (述語論理の)$\mathcal{L}$-論理式とする．φ に現れる p を (文字列として) 論理式 ψ に置き換えたものを $\varphi[\psi/p]$ で表す．このとき $\varphi[\psi/p]$ は $\mathcal{L}$-論理式．

- (変数への代入): ψ を $\mathcal{L}$-論理式，x を変数記号，t を $\mathcal{L}$-項とする．このとき，ψ に現れる自由変数 x を t に置き換えたものを $\psi[t/x]$ で表す．

注意 2.1. $\mathcal{L}$-論理式 ψ に現れる (かもしれない) 変数記号 x に着目しているとき ψ を $\psi(x)$ とも書くことがある．(例えば ψ で “x は 10 より大きく 100 より小さい” を表すとき，$\psi(x) \equiv 10 < x \wedge x < 100$ などと書く．) このとき $\psi[t/x]$ を $\psi(t)$ とも書く．

定義 2.7 (部分論理式). $\mathcal{L}$-論理式 φ の部分論理式を以下で定める．

- φ は φ の部分論理式である．
- ψ が φ の部分論理式であり，さらに $\psi \equiv (\theta_1) \wedge (\theta_2)$, $\psi \equiv (\theta_1) \vee (\theta_2)$, $\psi \equiv (\theta_1) \to (\theta_2)$ のいずれかの形であるとき θ_1, θ_2 は φ の部分論理式である．また，ψ が φ の部分論理式であり，さらに $\psi \equiv \neg(\theta)$ の形のとき θ は φ の部分論理式である．
- ψ が φ の部分論理式であり，さらに $\forall x(\theta)$, $\exists x(\theta)$ の形のとき θ は φ の部分論理式である．
- ψ が φ の部分論理式であり，x が ψ の自由変数，t が $\mathcal{L}$-項であるとき，$\psi[t/x]$ は φ の部分論理式である．

最初の 3 項目で与えられる部分論理式を狭義の部分論理式，最後の項目まで含めた部分論理式を広義の部分論理式などと呼ぶこともある．

定義 2.8. $\mathcal{L}$-論理式 φ について，$\mathrm{FV}(\varphi) = \emptyset$ のとき，φ を $\mathcal{L}$-閉論理式，または $\mathcal{L}$-文という．$\mathcal{L}$-文の集合は $\mathcal{L}$-理論とも呼ばれる．

2.2 述語論理の意味論 (構造，真理条件)

言語は $\mathcal{L} = (\mathcal{C}; \mathcal{F}; \mathcal{R}) = (c_1, \dots, f_1, \dots, R_1, \dots)$ を一つ固定する．

定義 2.9 ($\mathcal{L}$-構造). $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ とは集合 M と以下を満たす付値関数/解釈 v の組 $\mathcal{M} = (M, v)$ である．ただし v は

- $\mathcal{C}$ の元を M の元に対応させる
- $\mathcal{F}$ の n 変数関数記号を M 上の n 変数関数に対応させる
- $\mathcal{R}$ の n 項関係記号を M 上の n 項関係に対応させる

$\mathcal{L}$ 上の関数で，さらに以下に定める “項の解釈”, “タルスキの真理定義” をみたす関数 $\bar{v}$(単に v で書くことある)

- $\bar{v} : \mathcal{T}_M \to M$
- $\bar{v} : \mathcal{S}_M \to \{t, f\}$

を付随する．

以下の記法/用法もよく用いる．

- M は $\mathcal{M}$ の領域，宇宙 (universe) などと呼ばれる．$M = |\mathcal{M}|$ とも表す．また $\mathcal{M}$ と M を同一視し，単に $M = (M, \dots)$ などと書いて $\mathcal{L}$-構造を指すことも多い．
- $c \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{F}$, $R \in \mathcal{R}$ に対し，$v(c) = c^{\mathcal{M}}$, $v(f) = f^{\mathcal{M}}$, $v(R) = R^{\mathcal{M}}$ と表す．これにより $\mathcal{M} = (M; c^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, \dots)$ などと書いて v は直接表に出さないことが多い．

定義 2.10 ($\mathcal{L}_M$, 項の解釈)**.** $\mathcal{M} = (M, v)$ を $\mathcal{L}$-構造とする．

1. $\mathcal{L}_M = (\mathcal{C} \cup M, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ とする．$\mathcal{L}_M$-項を次で定める．
   - $\mathcal{C}$ の元，M の元，変数記号は $\mathcal{L}_M$-項である．
   - $t_1, \dots t_n$ が $\mathcal{L}_M$-項，f が $\mathcal{L}$ に含まれる n 変数関数記号の時，$f(t_1, \dots, t_n)$ は $\mathcal{L}_M$-項である．

   $\mathcal{L}_M$-閉項全体を $\mathcal{T}_M$ で表す．
2. $\mathcal{L}_M$-閉項の解釈 $\bar{v} : \mathcal{T}_M \to M$ を次で定める．
   - $c \in \mathcal{C}$ について $\bar{v}(c) = v(c) = c^{\mathcal{M}}$.
   - $a \in M$ について $\bar{v}(a) = a$.
   - $f \in \mathcal{F}$ が n 変数関数記号，$t_1, \dots, t_n$ が $\mathcal{L}_M$-閉項のとき $\bar{v}(f(t_1, \dots, t_n)) = v(f)(\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_n))$.

   $\bar{v}(t)$ は $t^{\mathcal{M}}$ とも書く．このとき最後の条件は $(f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}})$.

定義 2.11 (タルスキの真理定義)**.** $\mathcal{M} = (M, v)$ を $\mathcal{L}$-構造とする．

1. $\mathcal{L}_M$-論理式を自然に定める ($\mathcal{L}$-論理式の $\mathcal{L}$-項を $\mathcal{L}_M$-項に置き換えるだけ). $\mathcal{S}_M$ を $\mathcal{L}_M$-文 ($\mathcal{L}_M$-閉論理式) 全体の集合とする.

2. $\bar{v} : \mathcal{S}_M \to \{t, f\}$ を次で定める.

   - (原子論理式) $\varphi \equiv t = s$ のとき
     $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow t^{\mathcal{M}} = s^{\mathcal{M}}$ (M の元として等しい),
   - (原子論理式) $\varphi \equiv R(t_1, \dots, t_n)$ のとき $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}}$,
   - (かつ) $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ のとき $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow \bar{v}(\psi_1) = \mathbf{T}$ かつ $\bar{v}(\psi_2) = \mathbf{T}$,
   - (または) $\varphi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$ のとき $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow \bar{v}(\psi_1) = \mathbf{T}$ または $\bar{v}(\psi_2) = \mathbf{T}$,
   - (ならば) $\varphi \equiv \psi_1 \to \psi_2$ のとき $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow \bar{v}(\psi_1) = \mathbf{F}$ または $\bar{v}(\psi_2) = \mathbf{T}$,
   - (でない) $\varphi \equiv \neg\psi$ のとき $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow \bar{v}(\psi) = \mathbf{F}$,
   - (任意) $\varphi \equiv \forall x \psi$ のとき
     $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow$ 全ての $a \in M$ について $\bar{v}(\psi[a/x]) = \mathbf{T}$,
   - (存在) $\varphi \equiv \exists x \psi$ のとき
     $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{T} \Leftrightarrow$ ある $a \in M$ が存在して $\bar{v}(\psi[a/x]) = \mathbf{T}$.

   以上をタルスキの真理定義という. $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{T}$ を $\mathcal{M} \models \varphi$, $\bar{v}(\varphi) = \mathbf{F}$ を $\mathcal{M} \not\models \varphi$ と表すことも多い. 本稿でも $\bar{v}$ は表に出さずに以降この記法を用いる.

真理条件は閉論理式に対して定義されるが, 一般の論理式に対しては, その全称閉包を取って真偽を定める.

定義 2.12 (部分構造, 拡大). $\mathcal{M} = (M; \dots)$, $\mathcal{N} = (N; \dots)$ を $\mathcal{L}$-構造とする. $\mathcal{M}$ が $\mathcal{N}$ の部分構造である, あるいは $\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の拡大である, とは, $M \subseteq N$ であり, さらに

- 任意の $f \in \mathcal{F}$ と $a_1, \dots, a_n \in M$ について $f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n)$ (すなわち $f^{\mathcal{N}} \restriction M^n = f^{\mathcal{M}}$),

- 任意の $R \in \mathcal{R}$ と $a_1, \dots, a_n \in M$ について $R^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n)$ (すなわち $R^{\mathcal{N}} \cap M^n = R^{\mathcal{M}}$).

群や環などと同様に $\mathcal{L}$-構造間の準同形写像を考えることができ, 準同形や同型も定められる.

定義 2.13 (充足性 (satisfiability)). $\mathcal{L}$-論理式 φ が充足可能 (satisfiable) とは，ある $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ が存在して，$\mathcal{M} \models \varphi$ となることである．

定義 2.14 (恒真性 (validity)). $\mathcal{L}$-論理式 φ が恒真 (valid) とは，任意の $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{M} \models \varphi$ となることである．

定義 2.15 (理論，モデル).

- $\mathcal{L}$-(閉) 論理式の集合 Γ を $\mathcal{L}$-理論と呼ぶ．
- 理論 Γ に対し，任意の $\varphi \in \Gamma$ に対して $\mathcal{M} \models \varphi$ であるとき $\mathcal{M}$ を Γ のモデルである，と言い，$\mathcal{M} \models \Gamma$ で表す．

定義 2.16. $\mathcal{L}$-論理式 φ が $\mathcal{L}$-理論 T で恒真 (valid in T, $T \models \varphi$ で表す) とは，任意の $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{M} \models T$ ならば $\mathcal{M} \models \varphi$ となることである．

例 2.17. $\mathcal{L}_G = \{e, \cdot\}$(ただし e は定数記号，$\cdot$ は 2 変数関数記号とする．) 群の理論 G は次の論理式の全称閉包で与えられる．

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
2. $x \cdot e = x \wedge e \cdot x = x$
3. $\exists y(y \cdot x = e \wedge x \cdot y = e)$

このとき，次が成り立つ．

- $G \models \forall x \forall y \forall z((y \cdot x = e \wedge z \cdot x = e) \to y = z)$,
- $G \models \forall x \forall y(y \cdot x = e \to x \cdot y = e)$.

2.3 述語論理のシーケント計算 LK

述語論理のための証明体系シーケント計算 LK は，命題論理のシーケント計算 LK と同じ構造を持つ．等号のための始式と量化記号のための推論規則が追加されている．

定義 2.18 (シーケント計算 LK). LK は次の要素から構成される．(別紙参照)

- 始式:
  - $\varphi \vdash \varphi$ の形のシーケント，ただし φ は論理式
  - 等号のための始式 (等号の反射律，対称律，推移律，等号の公理)

- 推論規則
  - 構造規則
  - 論理結合子の規則
  - 量化記号の規則

注意 2.2. L$\exists$, R$\forall$ 規則では，適用のために変数条件 (eigenvariable condition) と呼ばれる条件が付けられている．これ以外の推論規則は，全て構造規則か新しい論理結合子/量化記号を導入する論理式のみに依存する推論規則となっている．しかし変数条件では下段のシーケントに現れる全ての論理式について条件をチェックしなければならない．

LK の証明図は命題論理の時と同様に定義される．

定義 2.19 (LK における証明可能性)**.**

- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ が LK において証明可能 (provable in LK) とは $\Gamma \vdash \Delta$ を終式に持つ LK の証明図が存在することである．
- 論理式 φ が LK で証明可能とはシーケント $\vdash \varphi$ が LK で証明可能なことである．
- 論理式 φ が LK で反証可能とはシーケント $\neg\varphi$ が LK で証明可能なことである．
- Γ を論理式の集合，φ を論理式とするとき，φ が Γ から LK で証明可能 ($\Gamma \vdash_{LK} \varphi$ とも書く) とは，Γ の元からなる論理式の有限列 Γ_0 が存在して，シーケント $\Gamma_0 \vdash \varphi$ が LK で証明可能なことである．

2.4 完全性定理

命題論理の時と同様に次の完全性定理が成り立つ．

定理 2.3 (完全性定理)**.** Γ を $\mathcal{L}$-理論，φ を $\mathcal{L}$-文とする．このとき次が成り立つ．

$$\Gamma \vdash_{LK} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi.$$

すなわち，次の二つが成り立つ．

1. 健全性定理 soundness theorem: φ が Γ から LK で証明可能ならば $\Gamma \models \varphi$.
2. 完全性定理 completeness theorem: $\Gamma \models \varphi$ ならば φ が Γ から LK で証明可能.

系 2.4 (完全性定理). $\mathcal{L}$-文 φ について次は同値である.

1. φ は恒真である.
2. φ は LK で証明可能である.

次の補題も命題論理の時と同様に成り立つ.

補題 2.5. Γ を $\mathcal{L}$-理論，φ を $\mathcal{L}$-文とする．このとき次が成り立つ.

1. $\Gamma, \neg\varphi$ が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$.
2. Γ, φ が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$.
3. Γ が矛盾 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ かつ $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

これを用いて完全性定理は次の形でも表現できる.

定理 2.6 (完全性定理 (表現その 2)).

$$\Gamma\text{は無矛盾} \Leftrightarrow \Gamma\text{は充足可能 (モデルを持つ)}.$$

ここで無矛盾性の定義 (と証明の有限性) から

$$\Gamma\text{は無矛盾} \Leftrightarrow \Gamma\text{の任意有限部分集合は無矛盾}$$

が成り立つことに注意すると，完全性定理の別表現は次のように言い換えらる.

定理 2.7 (コンパクト性定理).

$$\Gamma\text{は充足可能} \Leftrightarrow \Gamma\text{の任意有限部分集合は充足可能}.$$

コンパクト性定理は，完全性定理の単純な帰結でありながら LK での証明可能性について一切言及していないことに注意せよ．この定理により，もともとある $\mathcal{L}$-構造から新たな $\mathcal{L}$-構造を創り出すことができる．数理論理学，特にモデル理論分野の根幹をなす定理であり，応用は数理論理学全般において多岐にわたる.

2.4.1 コンパクト性定理の応用

定理 2.8 (自然数論の超準モデル). $\mathcal{L}_1 = \{0,1;+,\cdot;\leq\}$ とし，$\mathbb{N}$ を $\mathcal{L}_1$-構造 $\mathbb{N} = (\mathbb{N};0,1;+,\cdot;\leq)$ (通常の 0,1, 和, 積, 大小関係) とみなす．

このとき，$\mathcal{L}_1$-構造 $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ で $\mathbb{N}$ とは (同型の意味で) 異なるものが存在する．(ここで $\mathrm{Th}(\mathbb{N}) = \{\psi \mid \mathbb{N} \models \psi, \psi$ は $\mathcal{L}_1$-文 $\}$.)

$\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ は自然数論の自然な公理化であるペアノ算術 PA を含む．すなわち，述語論理により数学的帰納法を表現することで自然数の構造を完全に特徴付けることはできない．

Proof. $\mathcal{L}_1' = \{0,1,c;+,\cdot;\leq\}$ とし，$\mathcal{L}_1'$-理論 Γ を以下で定める．

$$\Gamma = \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \Big\{c > \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n} \Bigm| n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

すると Γ の任意有限部分集合は充足可能である．なぜなら，$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ を有限集合とすると，十分大きな $K \in \mathbb{N}$ について

$$\Gamma_0 \subseteq \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \Big\{c > \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n} \Bigm| n < K\Big\}$$

となる．よって $c^{\mathbb{N}} = K$ と解釈することにより $\mathbb{N} \models \Gamma_0$ である．

コンパクト性定理により Γ は充足可能であるので，$\mathcal{L}_1'$-構造 $\mathcal{M} = (M;\ldots)$ で $\mathcal{M} \models \Gamma$ なるものが存在する．このとき $c^{\mathcal{M}} \in M$ について $\mathcal{M} \models c > \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ．しかし $\mathbb{N}$ にはそのような元はないので $\mathcal{M}$ と $\mathbb{N}$ は異なる． $\square$

上の $\mathcal{M}$ において $c^{\mathcal{M}}$ は無限に大きい元のようにも見える．すなわち，自然数と同じ $\mathcal{L}_1$-文を満たしながら，無限大元も持つような $\mathcal{L}_1$-構造が存在することが分かる．このことの一つの応用が，無限大や無限小を用いた解析学 (超準解析学) である．

2.5 述語論理についての LK の健全性定理の証明

この節では次を証明する．

定理 2.9 (LK の健全性). Γ を $\mathcal{L}$-理論，φ を $\mathcal{L}$-文とする．このとき次が成り立つ．

$$\Gamma \vdash_{LK} \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi.$$

証明の方針

- Γ が有限の場合について示せば十分.
- 証明図の構成に関する帰納法.
- ただし自由変数の扱いに注意が必要 (バラバラに全称閉包をとってはいけない).

具体的には，証明図の終式が $\Gamma \vdash \Delta$ であるとき,

(∗) Γ, Δ に現れる自由変数を $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ とする．このとき任意の $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M} = (M; \ldots)$ と任意の $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \bar{M}$ について

$$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}] \Longrightarrow \mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$$

が成り立つことを証明図の構成に関する帰納法で示す．すなわち

- 始式で (∗) が成り立つ,
- 各推論規則において，上段で (∗) が成り立てば，下段でも (∗) が成り立つ.

注意: (∗) が成り立つのは次と同値である.

$$\models \forall x_1 \ldots \forall x_k \left(\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta \right).$$

Proof. 言語 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}; \mathcal{F}; \mathcal{R})$ を一つ固定し, π を $\Gamma \vdash \Delta$ を終式とする証明図とする．このとき以下が成り立つことを証明図の構成に関する帰納法で示す.

(∗) Γ, Δ に現れる自由変数を $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ とする．このとき任意の $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M} = (M; \ldots)$ と任意の $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in M$ について

$$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}] \Longrightarrow \mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}].$$

まず π が始式のみからなる証明図であるとき,

- $\varphi \vdash \varphi$ の形の始式で (∗) が成り立つことは自明.
- 等号に関する始式で (∗) が成り立つことは等号の性質から分かる. (演習問題)

次に π の終式がいずれかの推論規則の下式になっているとき,

- 構造規則のときは命題論理の時とほぼ同様に証明できる. (演習問題)

- 論理結合子の規則の場合を示す.

$(\to\mathbf{R})$ のとき

$\Gamma, A \vdash B, \Delta$ について $(*)$ が成り立つとする．このとき $\Gamma \vdash A \to B, \Delta$ について $(*)$ が成り立つことを示せば良い．Γ, A, B, Δ に現れる自由変数を $\vec{x}$ とし，$\mathcal{M} = (M; \dots)$ と $\vec{a} \in M$ を任意に取る．今，$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}]$ とすると，特に「$\mathcal{M} \models A[\vec{a}/\vec{x}]$」であれば $\Gamma, A \vdash B, \Delta$ について $(*)$ が成り立つことより $\mathcal{M} \models B[\vec{a}/\vec{x}] \vee \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$ である．一方,「$\mathcal{M} \models \neg A[\vec{a}/\vec{x}]$」であれば $\mathcal{M} \models A[\vec{a}/\vec{x}] \to B[\vec{a}/\vec{x}]$ である．いずれの場合も，$\mathcal{M} \models (A[\vec{a}/\vec{x}] \to B[\vec{a}/\vec{x}]) \vee \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$ を得る．

$(\to\mathbf{L})$ のとき

$\Gamma \vdash A, \Delta$ および $\Gamma, B \vdash \Delta$ について $(*)$ が成り立つとする．このとき $\Gamma, A \to B \vdash \Delta$ について $(*)$ が成り立つことを示せば良い．Γ, A, B, Δ に現れる自由変数を $\vec{x}$ とし，$\mathcal{M} = (M; \dots)$ と $\vec{a} \in M$ を任意に取る．今，$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}] \wedge (A[\vec{a}/\vec{x}] \to B[\vec{a}/\vec{x}])$ とすると，特に 「$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}]$ かつ $\mathcal{M} \models \neg A[\vec{a}/\vec{x}]$」であるか「$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}]$ かつ $\mathcal{M} \models B[\vec{a}/\vec{x}]$」である．前者の場合，$\Gamma \vdash A, \Delta$ について $(*)$ が成り立つことから，後者の場合，$\Gamma, B \vdash \Delta$ について $(*)$ が成り立つことから，$\mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$ を得る．

これ以外の場合も命題論理の時とほぼ同様に証明できる. (演習問題)

- 量化記号に関する規則の場合を示す.

$(\forall\mathbf{R})$ のとき

$\Gamma \vdash A[z/y], \Delta$ について $(*)$ が成り立ち，z は Γ, Δ に現れない自由変数とする．このとき $\Gamma \vdash \forall y A, \Delta$ について $(*)$ が成り立つことを示せば良い．$\Gamma, A[z/y]\Delta$ に現れる z 以外の自由変数を $\vec{x}$ とし，$\mathcal{M} = (M; \dots)$ と $\vec{a} \in M$ を任意に取る．

今，$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}]$ とすると，任意の $\bar{b} \in M$ について「$\mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$」であるか「$\mathcal{M} \models A[z/y][\vec{a}/\vec{x}, b/z]$」である．前者は b と無関係なので，これは「$\mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$」であるか「任意の $\bar{b} \in M$ について $\mathcal{M} \models A[z/y][\vec{a}/\vec{x}, b/z]$」である．特に後者の場合，$\mathcal{M} \models \forall y A[\vec{a}/\vec{x}]$ である．よって，いずれの場合にも $\mathcal{M} \models \forall y A[\vec{a}/\vec{x}] \vee \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$ を得る．

$(\forall\mathbf{L})$ のとき

$\Gamma, A[t/y] \vdash \Delta$ について $(*)$ が成り立つとする．このとき $\Gamma, \forall y A \vdash \Delta$ について $(*)$ が成り立つことを示せば良い．$\Gamma, A[t/y]\Delta$ に現れる自由変数を $\vec{x}$ とし，$\mathcal{M} = (M; \dots)$ と $\vec{a} \in M$ を任意に取る．今，$\mathcal{M} \models \bigwedge \Gamma[\vec{a}/\vec{x}] \wedge (\forall y A[\vec{a}/\vec{x}])$ とすると，特に任意の $\bar{b} \in M$ について $\mathcal{M} \models A[b/y][\vec{a}/\vec{x}]$ である．上記は特に $b = (t[\vec{a}/\vec{x}])^{\mathcal{M}}$ についても成り立つ．よって，$\Gamma, A[t/y] \vdash \Delta$ について $(*)$ が成り立つことより $\mathcal{M} \models \bigvee \Delta[\vec{a}/\vec{x}]$ を得る．

(∃L), (∃R) の場合も同様に証明できる．(演習問題)

以上により，証明図の終式で常に $(*)$ が成り立つことが示された．特に $\mathcal{L}$-文からなるシーケント $\Gamma \vdash \varphi$ が証明図の終式であれば $\Gamma \models \varphi$ である． □

演習 2.1. 健全性定理の証明を完成させよ．

2.6 述語論理についての LK の完全性とカット除去定理の証明 †

この節では LK の完全性の証明を見る．命題論理の時と同様に LK の ((cut) 規則を用いない) 証明図を探索する，と言う手法を用いることでカット除去定理も同時に証明する．

- シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ を終式に持つ LK の証明図で，推論規則 (cut) を含まない物が存在するとき，$\Gamma \vdash \Delta$ は LK-(cut) で証明可能であるという．
- ただし，この節の後半で述べる通り，シーケントが等号を含む論理式を含むとき，カット除去定理はそのままでは成り立たない．そこで必要に応じて等号のための始式を適切な推論規則に置き換えた証明体系を考えることとする．

述語論理において証明探索をする場合には，極大な部分論理式の集合を得るために，量化記号の推論規則 (特に (∀L) と (∃R)) について何度も (一般には無限に) 分解を行わなければならない．それを (抽象的な手法で) 実現するために次のツォルンの補題を用いる．

補題 2.10 (ツォルンの補題)**.** 帰納的半順序集合は極大元を持つ．(半順序集合が帰納的とは，任意の全順序部分集合が上界を持つことである．)

また，変数条件付きの推論規則 (∃L), (∀E) を分解する際に常に新しい変数を準備するために以下の補題を準備しておく．以下，

- 論理式に含まれる自由変数は $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \ldots\}$, 束縛変数は $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$,
- $\mathcal{A} = \{\forall x\theta \mid \theta$ は $\mathcal{L}$-論理式 $, x \in \mathcal{X}\}$: 一番外側が量化記号 $\forall x$ な論理式全体,
- $\mathcal{E} = \{\exists x\theta \mid \theta$ は $\mathcal{L}$-論理式 $, x \in \mathcal{X}\}$: 一番外側が量化記号 $\exists x$ な論理式全体,

とする．

補題 2.11. 次を満たす $h_A : \mathcal{A} \to \mathcal{Z}$, $h_E : \mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ が存在する．

- h_A, h_E はともに単射であり $h_A(\mathcal{A}) \cap h_E(\mathcal{E}) = \emptyset$,
- $\psi \in \mathcal{A}$ のとき，$h_A(\psi) \notin FV(\psi)$,
- $\psi \in \mathcal{E}$ のとき，$h_E(\psi) \notin FV(\psi)$.

注意 2.12. $\psi \in \mathcal{E}$ に対する $h_E(\psi)$ は，シーケントの左辺にある ψ に対して推論規則 ($\exists$L) による分解を作る際の新しい変数記号を準備する物である．これは，完全性定理の証明でよく用いられる $\mathcal{L}$-構造のヘンキン構成法 (Henkin construction) における ψ に対するヘンキン定数にあたる．

定理 2.13 (完全性定理，カット除去定理)**.** Γ を $\mathcal{L}$-文の集合、φ を $\mathcal{L}$-文とする。このとき次は同値。

1. φ が Γ から LK-(cut) で証明可能.
2. φ が Γ から LK で証明可能.
3. $\Gamma \models \varphi$.

$1 \to 2$ は自明，$2 \to 3$ は健全性定理であるので，$3 \to 1$ を示せば良い．以下，言語 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ を一つ固定し，(必要なら $\mathcal{C}$ に定数記号を付加することにより)$\mathcal{L}$ は定数記号を少なくとも一つ含むこととする．

$3 \to 1$ の対偶をつぎの一般的な形で示す．

(†) Γ_0, Δ_0 を $\mathcal{L}$-文の集合で，任意の有限列の組 $\Gamma' \subseteq \Gamma_0$, $\Delta' \subseteq \Delta_0$ についてシーケント $\Gamma' \vdash \Delta'$ が LK-(cut) で証明できないとする．このとき $\mathcal{M} \models \Gamma_0 \cup \neg\Delta_0$ なる $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ が存在する．
(ここで $\neg\Delta_0 = \{\neg\psi \mid \psi \in \Delta_0\}$.)

まず，簡単のため Γ_0, Δ_0 に等号が含まれていない場合について示す．

Proof. **(等号が含まれない場合)**
Γ_0, Δ_0 を (†) の仮定をみたし，等号を含まない $\mathcal{L}$-文の集合とする．このとき，$\mathcal{U}$ を次を満たす Γ_0, Δ_0 の部分論理式の集合の組 (Γ, Δ) 全体の集合とする:

- $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Delta_0 \subseteq \Delta$,
- 任意の有限列の組 $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$ についてシーケント $\Gamma' \vdash \Delta'$ が LK-(cut) で証明できない,

- $\psi \equiv \forall x\theta \in \mathcal{A}$ かつ $z = h_A(\psi) \in FV(\Gamma \cup \Delta)$ であれば $\theta[z/x] \in \Delta$,
- $\psi \equiv \exists x\theta \in \mathcal{E}$ かつ $z = h_E(\psi) \in FV(\Gamma \cup \Delta)$ であれば $\theta[z/x] \in \Gamma$.

$(\Gamma_0, \Delta_0) \in \mathcal{U}$ であるので $\mathcal{U}$ は空集合ではない．$(\Gamma, \Delta), (\Sigma, \Pi) \in \mathcal{U}$ に対して $(\Gamma, \Delta) \leq_{\mathcal{U}} (\Sigma, \Pi) \Leftrightarrow \Gamma \subseteq \Sigma$ かつ $\Delta \subseteq \Pi$ と定める．このとき $(\mathcal{U}, \leq_{\mathcal{U}})$ は帰納的半順序集合となる．($\{(\Gamma_i, \Delta_i)\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{U}$ が全順序部分集合であれば $(\bigcup_{i \in I} \Gamma_i, \bigcup_{i \in I} \Delta_i) \in \mathcal{U}$.) よって，ツォルンの補題より $(\mathcal{U}, \leq_{\mathcal{U}})$ は極大元 $(\bar{\Gamma}, \bar{\Delta})$ を持つ．

このとき，$\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ の極大性から以下が分かる．(すなわち，$\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$(の左辺) はヒンティカ集合 (Hintikka set) になっている．)

補題 2.14. $(\mathcal{U}, \leq_{\mathcal{U}})$ は極大元 $(\bar{\Gamma}, \bar{\Delta})$ は以下を満たす．

- $\varphi \wedge \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi, \psi \in \bar{\Gamma}$ (($\wedge$L') に対応)
- $\varphi \vee \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ または $\psi \in \bar{\Gamma}$ (($\vee$L) に対応)
- $\varphi \to \psi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\psi \in \bar{\Gamma}$ または $\varphi \in \bar{\Delta}$ (($\to$L) に対応)
- $\neg\varphi \in \bar{\Gamma}$ ならば $\varphi \in \bar{\Delta}$ (($\neg$L) に対応)
- $\varphi \wedge \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Delta}$ または $\psi \in \bar{\Delta}$ (($\wedge$R) に対応)
- $\varphi \vee \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi, \psi \in \bar{\Delta}$ (($\vee$R') に対応)
- $\varphi \to \psi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ かつ $\psi \in \bar{\Delta}$ (($\to$R) に対応)
- $\neg\varphi \in \bar{\Delta}$ ならば $\varphi \in \bar{\Gamma}$ (($\neg$R) に対応)
- $\forall x\theta \in \bar{\Gamma}$ かつ t が $FV(t) \subseteq FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ をみたす $\mathcal{L}$-項であれば $\theta[t/x] \in \bar{\Gamma}$ (($\forall$L) に対応)
- $\exists x\theta \in \bar{\Gamma}$ ならば $\theta[h_E(\exists x\theta)/x] \in \bar{\Gamma}$ (($\exists$L) に対応)
- $\forall x\theta \in \bar{\Delta}$ ならば $\theta[h_A(\forall x\theta)/x] \in \bar{\Delta}$ (($\forall$R) に対応)
- $\exists x\theta \in \bar{\Delta}$ かつ t が $FV(t) \subseteq FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ をみたす $\mathcal{L}$-項であれば $\theta[t/x] \in \bar{\Delta}$ (($\exists$R) に対応)

補題の証明．(∃L) 規則に対応するケースについて見る．$\exists x\theta \in \bar{\Gamma}$ かつ $\theta[h_E(\exists x\theta)/x] \notin \bar{\Gamma}$ であるとする．すると $\mathcal{U}$ の定義により $h_E(\exists x\theta) \notin FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ である．一方 $(\bar{\Gamma}, \bar{\Delta})$ の極大性から $(\bar{\Gamma} \cup \{\theta[h_E(\exists x\theta)/x]\}, \bar{\Delta}) \notin \mathcal{U}$ である．従ってある有限列の組 $\Gamma' \subseteq \bar{\Gamma}$, $\Delta' \subseteq \bar{\Delta}$ が存在して $\Gamma', \theta[h_E(\exists x\theta)/x] \vdash \Delta'$ が LK-(cut) で証明可能となる．(新しい自由変数が $h_E(\exists x\theta)$ のみであることに注意すれば，$(\bar{\Gamma} \cup \{\theta[h_E(\exists x\theta)/x]\}, \bar{\Delta})$ が $\mathcal{U}$ の他の性質を満たすことは容易に分かる.) すると (∃L) 規則により $\Gamma', \exists x\theta \vdash \Delta'$ も LK-(cut) で証明可能である．(変数条件が満たされていることに注意.) しかしこれは $(\bar{\Gamma}, \bar{\Delta}) \in \mathcal{U}$ に反する． □

$(\mathcal{U}, \leq_{\mathcal{U}})$ の極大元 $(\bar{\Gamma}, \bar{\Delta})$ を用いて $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ を以下のように定める．今，$\mathcal{Z}_0 = FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ とし，$FV(t) \subseteq \mathcal{Z}_0$ なる $\mathcal{L}$-項全体の集合を $\mathcal{T}_0$ とし，$\mathcal{T}_0$ 上の解釈 v を以下で定める．

- $c \in \mathcal{C}$ に対し $v(c) = c \in \mathcal{T}_0$,
- n 変数関数記号 $f \in \mathcal{F}$ と $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_0$ に対し
  $v(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_0$,
- n 項関係記号 $R \in \mathcal{R}$ と $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_0$ に対し
  $(t_1, \ldots, t_n) \in v(R) \Leftrightarrow R(t_1, \ldots, t_n) \in \bar{\Gamma}$.

$\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M} = (\mathcal{T}_0, v)$ と定める．すると $\bar{\Gamma}, \bar{\Delta}$ に含まれる $\mathcal{L}$-論理式は全て $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_0}$-文であり，$\mathcal{M} \models \bar{\Gamma} \cup \neg\bar{\Delta}$ であることが確かめられる．よって $\mathcal{M} \models \Gamma_0 \cup \neg\Delta_0$ である． □

演習 2.2. $(\mathcal{U}, \leq_{\mathcal{U}})$ の極大元が各推論規則に対応する所望の性質を持つことを確かめ，補題の証明を完成させよ．

演習 2.3. $(\bar{\Gamma}, \bar{\Delta})$ の上に挙げた性質から，$\mathcal{L}_{\mathcal{T}_0}$-文の構成に関する帰納法により，任意の $\psi \in \bar{\Gamma}$ について $\mathcal{M} \models \psi$ かつ任意の $\psi \in \bar{\Delta}$ について $\mathcal{M} \not\models \psi$ が得られることを確かめよ．

上の証明は，等号のための始式が使われている場合にはそのままではうまく機能しない．実際，例えば次のシーケントは等号の始式に (cut) を一度適用するだけで簡単に得られるが，(cut) なしでは証明できない:

$$t_1 = t_2, t_2 = t_3, t_3 = t_4 \vdash t_1 = t_4.$$

そこで等号の始式を適切な推論規則に置き換える (別紙推論規則表を参照) ことでカット除去を可能にする．以下は等号の始式の代わりに等号の推論規則を持つ LK について議論を行う．

Proof. **(等号が含まれる場合)**

Γ_0, Δ_0 を (†) の仮定をみたす $\mathcal{L}$-文の集合とする．このとき，半順序集合 $(\mathcal{U}, \leq_{\mathcal{U}})$ を次を等号が踏まれない場合と同様に定義する．するとツォルンの補題の補題により $(\mathcal{U}, \leq_{\mathcal{U}})$ は極大元 $(\bar{\Gamma}, \bar{\Delta})$ を持つ．

このとき，$\bar{\Gamma} \vdash \bar{\Delta}$ の極大性から補題 2.14 に加えて以下が分かる．

補題 2.15. $(\mathcal{U}, \leq_{\mathcal{U}})$ は極大元 $(\bar{\Gamma}, \bar{\Delta})$ は以下を満たす．

- t が $FV(t) \subseteq FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ をみたす $\mathcal{L}$-項であれば $t = t \in \bar{\Gamma}$
- $t = s \in \bar{\Gamma}$ ならば $s = t \in \bar{\Gamma}$
- $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \in \bar{\Gamma}$ ならば $t_1 = t_3 \in \bar{\Gamma}$
- f が n 変数関数記号であり，$t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n \in \bar{\Gamma}$ ならば $f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n) \in \bar{\Gamma}$
- R が n 項関係記号であり，$t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n, R(t_1, \ldots, t_n) \in \bar{\Gamma}$ ならば $R(s_1, \ldots, s_n) \in \bar{\Gamma}$

$(\bar{\Gamma}, \bar{\Delta})$ を用いた $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ の構成を以下のように変更する．

等号が含まれない場合と同様に，$\mathcal{Z}_0 = FV(\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta})$ とし，$FV(t) \subseteq \mathcal{Z}_0$ なる $\mathcal{L}$-項全体の集合を $\mathcal{T}_0$ とする．ここで $\mathcal{T}_0$ 上の 2 項関係 $\sim$ を以下で定める:

$$s, t \in \mathcal{T}_0 \text{ に対して } s \sim t \iff s = t \in \bar{\Gamma}.$$

すると補題より $\sim$ は $\mathcal{T}_0$ 上の同値関係になる．そこで集合 M を $\mathcal{T}_0$ の $\sim$ による商集合 $M = \mathcal{T}_0/\sim$ と定める．($t \in \mathcal{T}_0$ に対し t の $\sim$ による同値類を $[t]$ で表す．) M 上の解釈 v を以下で定める．

- $c \in \mathcal{C}$ に対し $v(c) = [c] \in M$,
- n 変数関数記号 $f \in \mathcal{F}$ と $[t_1], \ldots, [t_n] \in M$ に対し
  $v(f)([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)] \in M$,
- n 項関係記号 $R \in \mathcal{R}$ と $[t_1], \ldots, [t_n] \in M$ に対し
  $([t_1], \ldots, [t_n]) \in v(R) \Leftrightarrow R(t_1, \ldots, t_n) \in \bar{\Gamma}$.

再び補題により，この定義はwell-definedであることが確認できる．これにより$\mathcal{L}$-構造$\mathcal{M}$を$\mathcal{M} = (M, v)$と定める．今，$\psi \in \bar{\Gamma}$に対し，ψに現れる$\mathcal{L}$-項tを各々$[t]$に置き換えたものを$\bar{\psi}$とおくと$\bar{\psi}$は$\mathcal{L}_M$-文であり$\mathcal{M} \models \bar{\psi}$となる．同様に$\psi \in \bar{\Delta}$であれば$\mathcal{M} \not\models \bar{\psi}$となる．$\mathcal{M} \models \bar{\Gamma} \cup \neg \bar{\Delta}$であることが確かめられる．よって$\mathcal{M} \models \Gamma_0 \cup \neg \Delta_0$である． □

演習 2.4. 補題に挙げた$(\mathcal{U}, \leq_{\mathcal{U}})$の極大元が持つ追加の性質を確認せよ．

演習 2.5. 上の証明において$\sim$が同値関係であること, vがwell-definedであることを確かめよ．

演習 2.6. 論理式の構成に関する帰納法により，任意の$\psi \in \bar{\Gamma}$について$\mathcal{M} \models \bar{\psi}$かつ任意の$\psi \in \bar{\Delta}$について$\mathcal{M} \not\models \bar{\psi}$であることを確かめよ．