

以下に置いて、 $A, B$  は論理式、 $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma$  は論理式の有限列 (空でも良い) とする。

**LK** の始式

$$A \vdash A$$

**LK** の推論規則

(構造規則)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (WL)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (WR)}$$

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (CL)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (CR)}$$

$$\frac{\Pi, A, B, \Gamma \vdash \Delta}{\Pi, B, A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (EL)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Sigma} \text{ (ER)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ (cut)}$$

(論理結合子の規則)

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{B \wedge A, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} (\wedge R)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} (\vee L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee R) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, B \vee A} (\vee R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} (\rightarrow L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} (\neg R)$$

**Weakening, Contraction, Exchange** を適用した変形規則

(追加の規則として使用しても良い)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Pi, A \vdash \Sigma}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma} (\text{cut}')^\dagger$$

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L')$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Pi \vdash \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma, A \wedge B} (\wedge R')$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Pi \vdash \Sigma}{A \vee B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma} (\vee L')$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee R')$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Pi \vdash \Sigma}{A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma} (\rightarrow L')^\dagger$$

† 本来こちらが原規則

## LK-(cut) の証明探索のための分解

各推論規則に対応した分解は以下の通り.

(上段のシーケントを下段のシーケントの分解という. こちらを論理結合子の推論規則と思っても良い.)

$$\frac{A, B, A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L')$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B, A \quad \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} (\wedge R)$$

$$\frac{A, A \vee B, \Gamma \vdash \Delta \quad B, A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} (\vee L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee R')$$

$$\frac{A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta, A \quad A \rightarrow B, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} (\rightarrow L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow R)$$

$$\frac{\neg A, \Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, \neg A}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} (\neg R)$$