

I211 Mathematical Logic, final report

横山啓太

November 20, 2017

次のいずれか1問について解答せよ。

いずれの問題も、文献等を調べたり、他人と相談して解答しても良い。ただし、その場合には参考文献等 (web 上の情報を含む) や協力者名をはっきりと明示した上で、内容を理解し自分の言葉で記述すること。

Q 101 (キーワード:コンパクト性定理). $\mathcal{L} = \{e, \cdot\}$ とする。有限群の理論、すなわち次の 1,2 をみたすような理論 T は存在しないことを証明せよ。

- (i) \mathcal{L} -構造 M が T のモデルであれば、 M は有限群である。
- (ii) M が有限群であれば、 M は T のモデルである。

Hint: T を (i),(ii) を満たす \mathcal{L} -理論とし、 φ_n を “ n 個以上の元が存在する” ことを主張する \mathcal{L} -文とする。このとき、 $T + \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ が充足的かを考えてみよ。

Q 102 (キーワード:決定可能性/決定不能性). 命題論理の LK における証明可能性は決定可能で、一方述語論理の LK における証明可能性は決定不可能なことが知られている。これはどのような意味か調べ、数学的な定式化を与えよ。また、述語論理の LK が決定不可能であることの理由 (できれば数学的な証明) を与えよ。

Q 103 (完全性定理、cut 除去定理). 述語論理のシーケント計算 LK に関して次に答えよ。

1. 完全性定理および cut 除去定理の証明を与えよ。(補講の説明を補充して完成させても良い。)
2. LK において “ \vdash ” (左右ともに空なシーケント) は証明できるか? またその意味するところは何か?