

# グラフの Laplace-Beltrami 作用素とその応用

北陸先端科学技術大学院大学 林 幸雄 (Yukio HAYASHI)  
Japan Advanced Institute of Science and Technology, Hokuriku

## 1 はじめに

本研究は、「魅力的なコンテンツが何らかの引力圏を持ち、情報や知識の流通伝播を特徴付けるような、Web 情報空間は考えられないか？」という素朴な疑問から始まった。重力場や伝播・拡散系、さらにネットワークなどは互いに無関係な研究対象のように思われるが、これらをつなぎ合わせるものとしてラプリアンがある [11]。グラフや Riemann 多様体におけるラプリアンの固有値は、多くの幾何学的不変量と結び付くことから、これまでさまざまな研究がなされてきた [3][9][10][11]。しかしながら、従来の研究では homogeneous な正則グラフの代数構造に着目した等周問題や体積増大度などに関するものが主流である。正則グラフは、人為的に効率よく実現され得る均一の素子や構造を持つ並列計算機的设计には適するものと考えられる。

一方、WWW をはじめ電力網や人間関係などのネットワークは、scale-free nets と呼ばれる疎密な結合が混在する heterogeneous なトポロジーを持ち [2]、日々増大して自律的に成長している。これは、疎密な尺度が混在した計量空間を連想させるとともに、応用課題においても、分散システム上の負荷均一化や WWW 上の価値伝播など異なるものが考えられる。

本論文では、このようなヘテロな構造を持つネットワークに適した新しい作用素による拡散を考え、特に、帯域幅などの重みが付いたネットワーク上の分散サーバの負荷均一化への応用を検討する。これらの結果が、WWW などの自律成長するネットワークを伝播特性に関する計量空間として捉える試みの、第 1 歩を築くことを期待したい。

## 2 双対平坦構造を導入した Laplace-Beltrami 作用素

従来の Levi-Civita 接続でなく情報幾何学の双対接続 [1] を用いて、Laplace-Beltrami 作用素 [10] からヘテロな構造を持つグラフに適した新しい作用素を導く。

### 2.1 連続版 -場所ごとに異なる計量を導入-

コンパクト Riemann 多様体  $M$  上の  $C^\infty$  関数  $f(x)$  と、以下の Laplace-Beltrami 作用素  $\mathcal{L}$  を考える。

$$\mathcal{L}f(x) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{ij} g^{ij}(x) \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} f(x) = - \sum_{ij} g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \quad (1)$$

ここで,  $[g^{ij}]$  は Riemann 計量  $[g_{ij}]$  の逆行列で,

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_h g^{hk} \Gamma_{ijh}, \quad (2)$$

において, 通常は  $\Gamma_{ijh} = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_h \rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{hk}$  を Levi-Civita 接続  $\hat{\Gamma}_{ijh}$  を用いて定義する. ここで,  $\partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i}$  と表記した.

さて, 双対なアファイン接続のペア  $\Gamma_{ijh}$  と  $\Gamma_{ihj}^*$  を選び, 片方の接続に関して平坦な空間構造 (implicit な双対座標系, 接続係数:  $\Gamma_{ihj}^* = 0$ ) を導入すると,

$$\partial_i g_{jh} = \Gamma_{ijh} + \Gamma_{ihj}^* = \Gamma_{ijh}, \quad (3)$$

となる [1].

一方,  $\sum_j g_{jh} g^{ij} = \delta_h^i$  の両辺に  $\partial_i$  を施すと, 各  $i, h$  について

$$\sum_j (\partial_i g_{jh} g^{ij} + g_{jh} \partial_i g^{ij}) = 0.$$

上式に  $[g^{hk}]$  をかけ ( $\sum_h$  をとる), 式 (2) と (3) を使って,

$$\sum_j \left\{ \sum_h g^{hk} \partial_i g_{jh} g^{ij} + \sum_h g^{hk} g_{jh} \partial_i g^{ij} \right\} = \sum_j (\Gamma_{ij}^k g^{kj} + \delta_j^k \partial_i g^{ij}) = 0,$$

となる (各  $i, k$  について).

よって,

$$\partial_i g^{ik} = - \sum_j \Gamma_{ij}^k g^{ij}, \quad (4)$$

を得る. このとき, 式 (1) は以下のように書き直せる.

$$\mathcal{L}f(x) = - \sum_{ij} g^{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{ik} \partial_i g^{ik}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^k}. \quad (5)$$

逆に, この作用素 (5) を出発点とすれば, 双対平坦構造を經由して Laplace-Beltrami 作用素 (1) が得られる. 一方, 双対平坦構造を仮定しなければ,  $\partial_i g^{ik} = - \sum_{j,h} g^{hk} \partial_i g_{jh} g^{ij}$  は Levi-Civita 接続や双対接続に対して,  $\partial_i g^{ik} = - \sum_{j,h} g^{hk} g^{ij} (\hat{\Gamma}_{ijh} + \hat{\Gamma}_{ihj})$  や  $\partial_i g^{ik} = - \sum_{j,h} g^{hk} g^{ij} (\Gamma_{ijh} + \Gamma_{ihj}^*)$  などを考えていることに相当する. これらは, 媒質の流速ベクトル  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (b^1(\mathbf{x}), \dots, b^n(\mathbf{x}))$  に関する付加項を持つ以下の偏微分作用素  $A$  に対応する. その共役作用素  $A^*$  を用いればグリーンの公式 (8) が成り立つことが知られている [5].

$$\begin{aligned} Af &\stackrel{\text{def}}{=} -\text{div}_G(\text{grad}_G f) + \sum_i b^i \partial_i f, \\ A^* f &\stackrel{\text{def}}{=} -\text{div}_G(\text{grad}_G f) - \sum_i \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \partial_i (\sqrt{\det(g_{ij})} b^i f), \\ &= -\text{div}_G(\text{grad}_G f) - \sum_i (\partial_i \sqrt{\det(g_{ij})}) b^i f - \sum_i (\partial_i b^i) f, \\ -\text{div}_G(\text{grad}_G f) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_i \partial_i (\sqrt{\det(g_{ij})} \text{grad}_G f), \end{aligned} \quad (6)$$

$$= - \sum_{ij} g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \hat{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \quad (7)$$

$$\int_M A f_1 f_2 \sqrt{\det(g_{ij})} dx = \int_M f_1 A^* f_2 \sqrt{\det(g_{ij})} dx. \quad (8)$$

式 (7) は Levi-Civita 接続による作用素 (1) に他ならない [10].

## 2.2 離散版 -既存のラプラシアンとの比較-

コンパクト Riemann 多様体  $M$  に対応する有限連結な無向グラフ  $(V, E)$  上で、作用素 (5) の離散版を考える。但し、 $i = k, g^{ij} = 0, (i \neq j)$  とする。 $i \neq k, g^{ij} \neq 0$  の場合は、グリーンの公式を満足する  $\mathcal{L}$  の離散対応が見つからないばかりか、辺の相互作用まで考慮することから、複雑なわりに応用上のメリットも低いと考えられるので、本論文では議論しない。

さて、式 (5) 右辺第 2 項の  $\partial_i g^{ii}$  に相当する、辺  $e_i$  の両端における重みの差分を、

$$\Delta g^{ii}(u) \stackrel{\text{def}}{=} g^{ii}(v) - g^{ii}(u),$$

と定義すれば、各頂点  $u \in V$  の隣接点  $v$  ( $v \sim u$  で表す) に作用する、

$$\mathcal{L}f(u) = - \sum_{v \sim u \in E} g^{ii}(u)(f(v) - f(u)) - \sum_{v \sim u: e_i, \bar{e}_i \in E} \Delta g^{ii}(u) \frac{f(v) - f(u)}{2}, \quad (9)$$

$$= - \sum_{v \sim u \in E} \frac{g^{ii}(v) + g^{ii}(u)}{2} (f(v) - f(u)), \quad (10)$$

を得る。ここで、 $E$  は両方向の全ての有向辺の集合、 $e_i$  は頂点  $u$  に隣接するある有向辺、 $\bar{e}_i$  はその逆向辺とする。式 (9) 右辺において、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial x^i}$  に対応する項はそれぞれ正方格子上の差分  $f(v) - f(u), \frac{1}{2}(f(v) - f(u))$  と一致する [4]。一方、仮に Levi-Civita 接続で式 (1) の  $\mathcal{L}$  を定義したと考えると、式 (5) の右辺第 2 項が  $\frac{\partial_i g^{ii}}{2} \partial_i f$  となってしまう、類似した形だが離散版との対応が悪い ( $\times \frac{1}{2}$  分が邪魔)。ゆえに、式 (9) は式 (1) で双対平坦な場合の離散版と解釈するのが妥当と考えられる。

また、式 (9) は  $w(u, v) = \frac{g^{ii}(u) + g^{ii}(v)}{2}$  とすれば、式 (11) による重み付きグラフ上のラプラシアン [3] に情報幾何学的な解釈を与えた拡張版として対応付けられる。さらに、表 1 に示すように、式 (12) による調和振動子のバネモデルの一般化 [9] とも密接な関係を持つ。

$$Lf(u) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{v \sim u} w(u, v) (f(v) - f(u)), \quad (11)$$

$$\Delta_P f(u) \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{1}{m_V(u)} \sum_{v \sim u} m_E(e_i) (f(v) - f(u)), \quad (12)$$

但し、 $w(u, v) = w(v, u) > 0, m_E(e_i) = m_E(\bar{e}_i) > 0$  とする。

$\forall g^{ii}(v), g^{ii}(u) > 0,$	$\rightarrow$	$w(u, v)$ は一意.	$\Leftarrow$	$m_V(u) = m_V(v) > 0$
内分比の自由度.	$\Leftarrow$		$\Rightarrow$	$w(u, v) = \frac{m_E(e_i)}{m_V(u)},$
同等			条件付	$g^{ii}(v) = g^{ii}(u) = \frac{m_E(e_i)}{m_V(u)},$
				場所不変: $\Delta g^{ii}(u) = 0.$

表 1: 既存のグラフのラプラシアンとの対応関係

## 3 グリーンの公式と最大最小の原理

連続版と離散版 (グラフ) の作用素 (5) と (10) に対して、以下の定理が成り立つ。

定理 1 グリーンの公式

$$\int_M \mathcal{L}f_1 f_2 dx = \int_M \langle df_1, df_2 \rangle_G dx = \int_M f_1 \mathcal{L}f_2 dx, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{u \in V} \langle df_1, df_2 \rangle_G = \sum_{u \in V} \mathcal{L}f_1(u) f_2(u) = \sum_{u \in V} f_1(u) \mathcal{L}f_2(u), \quad (14)$$

$\langle df_1, df_2 \rangle_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \langle df_1, df_2 \rangle_{G_u}$ ,  $df_1(u) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(v) - f_1(u)$ ,  $df_2(u) \stackrel{\text{def}}{=} f_2(v) - f_2(u)$ ,  
 $e_i : u \rightarrow v$ ,  $\bar{e}_i : v' \rightarrow u$ ,

$$\langle df_1, df_2 \rangle_{G_u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e_i: u \rightarrow v} g^{ii}(u) df_1(u) df_2(u) + \sum_{\bar{e}_i: v' \rightarrow u} g^{ii}(u) df_1(v') df_2(v').$$

[証明]：まず連続版について，コンパクトな多様体  $M$  上の  $C^\infty$  関数  $f_1, f_2$  を考える（連続版についてのみ，以下の議論は  $i \neq k$ ,  $g^{ij} \neq 0$  の場合でも成立するので一般形で書く）。

式 (5) が，

$$\mathcal{L}f = - \sum_{i,j} \left( g^{ij} \partial_i \partial_j f + \partial_i g^{ij} \partial_j f \right) = -\text{div}(\text{grad}_G f),$$

であることと，余境界作用素（または勾配と呼ばれる） $df$  の内積の定義より，

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \partial_i (g^{ij} \partial_j f_1 f_2) &= \sum_{i,j} \{ \partial_i g^{ij} \partial_j f_1 f_2 + g^{ij} \partial_i \partial_j f_1 f_2 + g^{ij} \partial_j f_1 \partial_i f_2 \}, \\ &= -(\mathcal{L}f_1 f_2 - \langle df_1, df_2 \rangle_G), \end{aligned}$$

となる．通常の体積に関する測度  $\sqrt{\det(g_{ij})} dx$  [5][10][11] に固執せず， $\int_M dx$  を両辺に施すと， $M$  がコンパクトであることから左辺は零になる．同様に，

$$\sum_{i,j} \left\{ \partial_i (g^{ij} \partial_j f_1 f_2) - \partial_j (g^{ij} f_1 \partial_i f_2) \right\} = -(\mathcal{L}f_1 f_2 - f_1 \mathcal{L}f_2),$$

に対して両辺の積分  $\int_M dx$  をとると，左辺は零になる．よって，式 (13) が成り立つ．この  $\mathcal{L}$  は，従来とは別の内積を考えたことに相当する測度  $dx$  のもとで自己共役な作用素であり，式 (8) における共役作用素  $A, A^*$  とは明らかに異なる．

次に離散版について考える（図 1 参照）． $\sum_u \langle df_1, df_2 \rangle_{G_u}$  において， $u$  に入る辺  $e_i$  と出る辺  $e_j$  に関する項をそれぞれみると，

$$u \rightarrow v: \quad g^{ii}(u) \times \left\{ \underline{(f_1(v)f_2(v) - f_1(u)f_2(v))} + (-f_1(v)f_2(u) + f_1(u)f_2(u)) \right\},$$

$$v' \rightarrow u: \quad g^{jj}(v') \times \left\{ (f_1(v')f_2(v') - f_1(u)f_2(v')) + \underline{(-f_1(v')f_2(u) + f_1(u)f_2(u))} \right\},$$

となる．

上記に対応する  $\sum_{u \in V} \mathcal{L}f_1(u) f_2(u)$  における式 (9) 右辺第 1 項の  $u$  に関する項は，

$$u: \quad g^{ii}(u) \times (-f_1(v)f_2(u) + f_1(u)f_2(u)) + g^{jj}(u) \times \underline{(-f_1(v')f_2(u) + f_1(u)f_2(u))},$$

$$v: \quad g^{ii}(v) \times \underline{(-f_1(u)f_2(v) + f_1(v)f_2(v))},$$

$$v': \quad g^{jj}(v') \times (-f_1(u)f_2(v') + f_1(v')f_2(v')),$$

となり，これらが互いに等しくなるには式 (9) 右辺第 2 項が，

2重下線の  $u$  について:  $(g^{jj}(v') - g^{jj}(u)) \times (f_1(u) - f_1(v'))$ ,

1重下線の  $v$  について:  $(g^{ii}(u) - g^{ii}(v)) \times (f_1(v) - f_1(u))$ ,

を含めば良い. すなわち, 式 (9) 右辺第 2 項が  $u$  に関して,

$$- \sum_{v' \rightarrow u: e_j \in E_u} \Delta g^{jj}(u)(f_1(v') - f_1(u)), \quad (15)$$

$$\Delta g^{jj}(u) = g^{jj}(v') - g^{jj}(u) = g^{jj}(o(e_j)) - g^{jj}(t(e_j)),$$

となれば良い ( $v, v'$  に関しても同様). これは, 計量  $g^{jj}$  の  $j$  方向の変化量という意味にも合致する.

同様に,  $\bar{e}_i$  や  $\bar{e}_j$  についてみると  $v$  と  $v'$  の役割が入れ替わり, 式 (14) 右辺  $\times 2$  により隣接辺で各頂点のペアを 2 重に考えていることから, 式 (9) 右辺第 2 項が  $u$  に関して,

$$- \sum_{v \rightarrow u: \bar{e}_i \in E_u} \Delta g^{ii}(u)(f_1(v) - f_1(u)), \quad (16)$$

$$\Delta g^{ii}(u) = g^{ii}(v) - g^{ii}(u),$$

となれば良い. ここで, 式 (15) と (16) はそれぞれ別々の辺 ( $u$  に入る辺  $e_j$  と出る辺  $e_i$  の集合) を対象としていることに注意.

ゆえに, 式 (14) 左辺の  $\frac{1}{2}$  分を換算したグラフ上の Laplace-Beltrami 作用素 (9) について, グリーンの公式 (14) が成立する.  $f_1$  と  $f_2$  を左右入れ替えても同様である [QED].

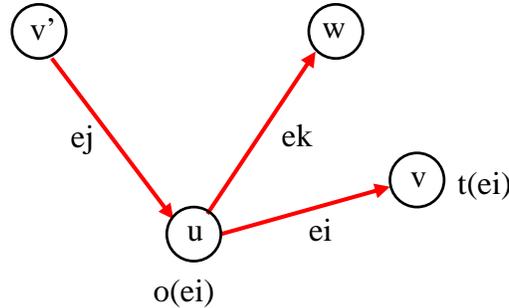


図 1: 有向辺と始終点

定理 1 において,  $f_2 = 1$  と  $f_1 = f_2$  の時,  $df_2 = 0$  と  $[g_{ij}]$  の正定値性から, それぞれ以下の系を得る.

系 1  $\int_M \mathcal{L} f_1 dx = \int_M \langle df_1, 0 \rangle_G dx = 0, \sum_{u \in V} \mathcal{L} f_1(u) = 0.$

系 2  $\int_M \mathcal{L} f_1 f_1 dx = \int_M \langle df_1, df_1 \rangle_G dx \geq 0, \sum_{u \in V} f_1(u) \cdot \mathcal{L} f_1(u) \geq 0.$

定理 2 最大最小の原理

境界条件のない有限な連結無向グラフ  $(V, E)$  において,  $\forall u \in V, \mathcal{L} f(u) = 0$  を満たす  $\mathcal{L}$ -調和関数  $f(u)$  は定数である.

[証明] :  $V$  中で  $f(u)$  が最大値と仮定する (最小値でも以下同様). また, この頂点  $u$  の隣接点  $v \sim u$  における最大値を  $f(v')$  とする.

$\mathcal{L}$ -調和関数は,  $w(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g^{ii}(u)+g^{ii}(v)}{2} > 0, \forall u \in V$  に対して,

$$-\sum_{v \sim u} w(u, v)(f(v) - f(u)) = 0 \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} \sum_{v \sim u} w(u, v)f(v),$$

を満たすものであることから,

$$f(u) = \frac{1}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} \sum_{v \sim u} w(u, v)f(v) \leq \frac{\sum_{v \sim u} w(u, v)}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} f(v') = f(v'),$$

となり,  $f(u)$  の最大値性の仮定により  $f(u) = f(v')$  となる (不等号の場合は仮定に矛盾).

一方,  $f(u)$  の最大値性と  $w(u, v) > 0$  により,

$$\mathcal{L}f(u) = -\sum_{v \sim u} w(u, v)(f(v) - f(u)) = \sum_{v \sim u} w(v, v')(f(v') - f(v)) \geq 0,$$

における和の各項が非負となるので,  $f(u)$  が  $\mathcal{L}$ -調和であるには,  $\forall v \sim u$  に対して,  $f(u) = f(v) = f(v')$  でなければならない. グラフは連結なので隣接する全ての頂点でこれが成り立つ. ゆえに,  $f(u)$  は定数となる [QED].

#### 4 $\mathcal{L}$ による拡散方程式としての性質

サーバを表す各頂点  $u \in V$  と通信速度や帯域幅などの伝播効率を表す重み  $w(u, v)$  からなるネットワーク上の負荷均一化問題 [6] を扱うため, 以下の拡散方程式を考える.

$$\frac{\partial h(u, t)}{\partial t} = -\mathcal{L}h = \text{div}(\text{grad}_G h). \quad (17)$$

さて,  $h(u, t) = f(u) \times g(t)$  と変数分離できるとして, 上式の両辺に  $-\frac{1}{fg}$  をかけると,

$$-\frac{\partial g/\partial t}{g} = \frac{\mathcal{L}f}{f} = \lambda : \text{const.},$$

となり, 固有値問題  $\mathcal{L}f = \lambda f$  と,  $\dot{g} = -\lambda g \Rightarrow$  解:  $g(t) = c \cdot e^{-\lambda t} + d$  を得る.

性質 1: 定数関数は, 固有値 0 に対する解 (固有ベクトル) である.

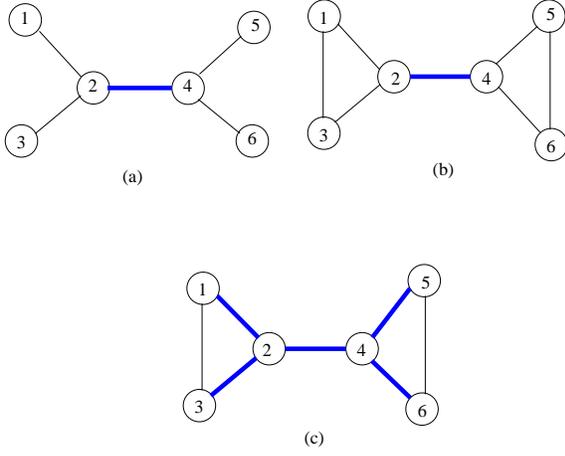
性質 2: 計量行列  $[g^{ij}]$  の正定値性より,  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots$  となる ( $\lambda_G \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1$ ).

性質 3:  $t \rightarrow \infty$  での平衡解は,  $\mathcal{L}$ -調和関数: 定数となり, 局所的には

$$f(u) = \sum_{v \sim u} \frac{w(u, v)}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} f(v),$$

を満たす (重み付き平均化, 平滑化). これはまた Jacobi 法の反復式 [7] に他ならない.

さらに, 系 1,2 から以下の定理が成り立つ. これらから, (17) の拡散処理によって任意の初期負荷から均一な負荷配分に単調に収束することがわかる.



(a) Tree	固有値	$\lambda_G$
$w(2,4) \times 0.5$	0, 0.267, 1, 1, 3, 3.732	0.267
normal	0, 1, 1, 3, $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$	0.438
$w(2,4) \times 2$	0, 1, 1, 3, $\frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$	0.627
$w(2,4) \times 4$	0, 1, 1, 3, $\frac{11 \pm \sqrt{89}}{2}$	0.789
(b) Net	固有値	$\lambda_G$
$w(2,4) \times 0.5$	0, 0.267, 3, 3, 3, 3.732	0.267
normal	0, 3, 3, 3, $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$	0.438
$w(2,4) \times 2$	0, 3, 3, 3, $\frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$	0.627
$w(2,4) \times 4$	0, 3, 3, 3, $\frac{11 \pm \sqrt{89}}{2}$	0.789
(c) NetII	固有値	$\lambda_G$
Tree $\times 0.5$	0, 0.219, 1.5, 2.28, 2.5, 2.5,	0.219
Tree $\times 2$	0, 4, 4, 6, $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$	0.876
Tree $\times 4$	0, 6, 6, 12, $\frac{10 \pm 2\sqrt{17}}{2}$	1.752

図 2: ネットワークグラフ (太線を重み付け) と固有値の分布

### 定理 3 総負荷量の保存

拡散方程式 (17) は総負荷量  $Cost \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u \in V} h(u, 0)$  を保存する. すなわち,  $\forall t \geq 0$  で,

$$\int_M \text{div}(\text{grad}_G h(x, t)) \, dx = - \int_M \mathcal{L}h(x, t) \, dx = 0,$$

$$\sum_{u \in V} \frac{\partial h(u, t)}{\partial t} = - \sum_{u \in V} \mathcal{L}h(u, t) = 0.$$

### 定理 4 平衡解への残差の単調減少性 (離散時間では $\Delta t$ が十分小の時に成立)

$$\frac{d \sum_u (Cost/|V| - h)^2}{dt} = 2 \sum_{u \in V} (Cost/|V| - h) \times (\mathcal{L}h) \leq 0.$$

## 5 分散サーバの負荷均一化への応用例

図 2 に, (a) Tree, (b) Net, (c) NetII と, それぞれに対する  $\mathcal{L}$  の固有値の分布を示す. ここで, normal は全ての辺が重み 1, また,  $\times 0.5, 2, 4$  などは辺の重み (図 2 の太線部分) の値  $w(u, v)$  を表す. 以下に, 初期負荷  $[h(1, 0), \dots, h(6, 0)]$  を, i1:  $[10, 10, 6, 4, 8, 12]$ , i2:  $[15, 3, 1, 20, 2, 19]$ , i3:  $[1, 2, 2, 10, 20, 25]$  と設定した時の, 式 (17) の拡散方程式 ( $\Delta t = 0.1$ ) による負荷均一化への収束特性を示す.

図 3 は, 初期負荷 i1 に対する残差ノルム  $\sum_{u \in V} (Cost/|V| - h(u, t))^2$  の変化を示す. 実線の重みなし Tree より,  $\times$  印の重み付き Tree で収束速度が若干,  $+$  印の重み付き Net ( $\diamond$  印は重みなし Net) ではかなり向上している. 図 4 は,  $\square$  印の重み付き NetII でさらに収束速度が向上することを示している. 初期負荷 i2 に対する図 5 や図 6 では, その傾向がさらに顕著になっている (但し, 重み  $\times 0.5$  では固有値が小さくなるために実線の Tree より改悪). 一方, 初期負荷 i3 に対しては, 図 7 において, 重み付けの効果は見られるものの, Tree と Net との構造による差は見られない. NetII では i1 や i2 の場合と同様に, 図 8 に示すように, 収束速度が最も向上している. これらの結果は, 図 2 に示した固有値の大小に対応するとともに, 定理 3, 4 による総負荷量を保存した上での単調な残差の減少を裏付けるものである.

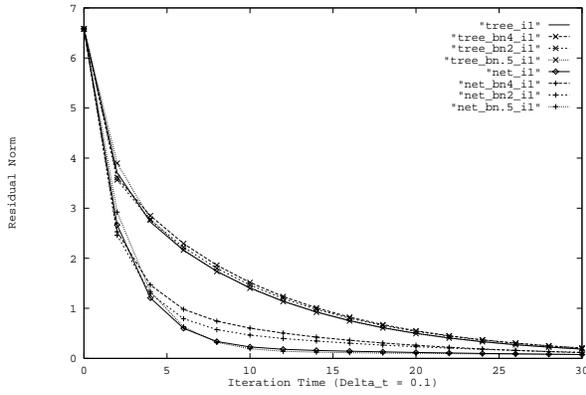


図 3: 拡散処理の収束特性, (a)(b), i1

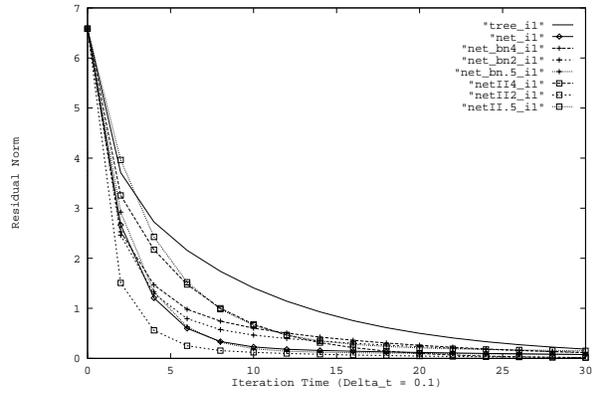


図 4: 拡散処理の収束特性, (a)(c), i1

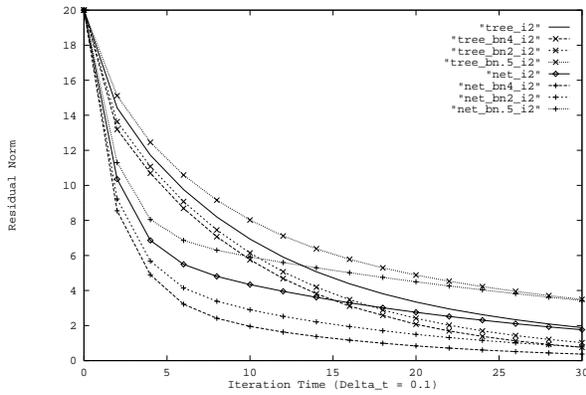


図 5: 拡散処理の収束特性, (a)(b), i2

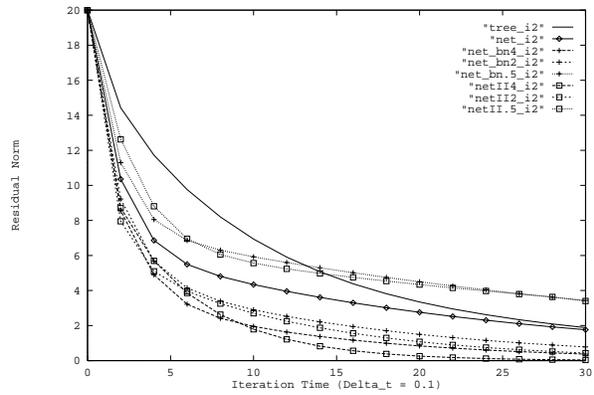


図 6: 拡散処理の収束特性, (a)(c), i2

## 6 まとめ

ヘテロな構造を持つネットワークに適した新しい作用素を考え、その拡散処理による分散サーバの負荷均一化への応用を検討した。まず、双対平坦構造 [1] を導入した Laplace-Beltrami 作用素 [10] の、連続版と離散版をそれぞれ考え、既存の Levi-Civita 接続に基づくラプラシアン [11] や共役作用素 [5]、重み付きグラフのラプラシアン [3][9] 等との相違点を整理した。次に、この新しい作用素に適した内積 (測度) の定義を与えて、グリーンの公式、最大最小の原理を証明した。また、上記の作用素に基づく拡散方程式の性質として、固有値の非負性、 $\mathcal{L}$ -調和関数による平衡解、総負荷量の保存性、平衡解への残差の単調減少性 等を明らかにした。

さらに実験例から、ネットワーク構造や辺の重み (帯域幅などに相当) によって拡散速度が向上することを確認した。この拡散伝播による負荷均一化は、局所分散処理で実現できるとともに、on-line な負荷量の変動にも対処できるばかりか、特定の回線や上下方向 (非対称) で伝播効率 (帯域幅や通信速度など) が異なる現実的な種々のネットワークに広く適用可能と考えられる。

今後の課題としては、ネットワーク構造や重み値と固有値に関する理論的評価や、 $\partial_i g^{ik}$  による (5) が Laplace-Beltrami 作用素 (1) となるための双対平坦構造の必要性に関する議論など

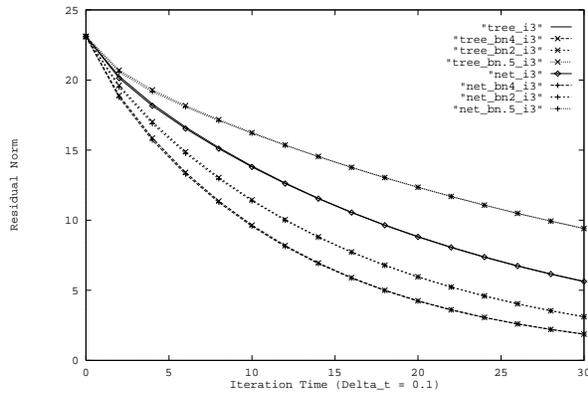


図 7: 拡散処理の収束特性, (a)(b), i3

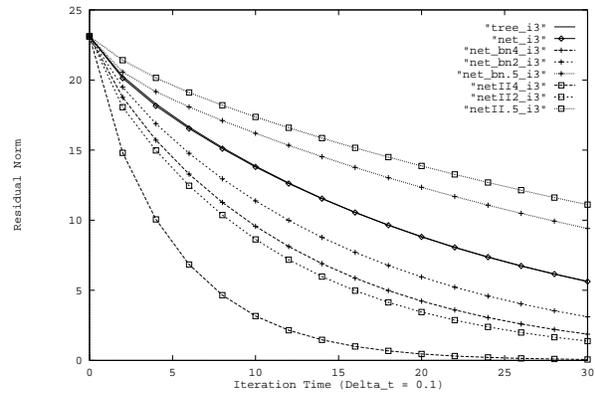


図 8: 拡散処理の収束特性, (a)(c), i3

が挙げられる。前者については、境界付きグラフ上の  $Lh = c$  に対する反復解法の加速法 [7][8] と関連した検討が有効と思われる。また応用上の課題として、分散サーバの負荷均一化処理に対する実装アルゴリズム [6] の検討評価なども重要である。

謝辞：本研究の初期段階におきまして、有益な御指摘を頂きました東北大学大学院情報科学研究科の浦川 肇 教授に感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] 甘利 俊一, 長岡 浩司. 情報幾何の方法. 岩波講座 応用数学 [対象 12], 岩波書店, 1994.
- [2] A.L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong. “Mean-field theory for scale-free random networks”, *Physica A*, vol. 272, pp. 173-187, 1999.
- [3] F.R.K. Chung. *Spectral Graph Theory*, Amer. Math. Soc., 1994.
- [4] G.E. Forsythe, and W.R. Wasow. *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1960.
- [5] 伊藤 清三. 拡散方程式, 紀伊国屋書店, 1979.
- [6] 森 英雄, 河野 浩之. “実測データに基づく分散協調型 WWW データ収集アルゴリズムの性能評価,” 第 2 回インターネットテクノロジーワークショップ, 1999.
- [7] 森 正武, 杉原 正顕, 室田 一雄. 線形計算. 岩波講座 応用数学 [方法 2], 岩波書店, 1994.
- [8] 仁木 滉, 河野 敏行. 楽しい反復法. 共立出版, 1998.
- [9] 砂田 利一. “離散スペクトル幾何学,” 上野 他編, 数学のたのしみ, No.12, pp. 67-80, 日本評論社, 1999.
- [10] 浦川 肇. 変分法と調和写像, 裳華房, 1990.
- [11] 浦川 肇. ラプラス作用素とネットワーク, 裳華房, 1996.