

グラフのLaplace-Beltrami作用素とその応用

林 幸雄（北陸先端科学技術大学院大学）

京大数理解析研・研究集会 H13 July 17-19
「数理最適化の理論とアルゴリズム」

1 素朴な疑問

魅力的なコンテンツが引力圏を持ち、情報や知識の流通伝播を特徴付けるような、Web情報空間は考えられないか？

物理空間と同じである必要はなく、むしろ異なる空間構造の方が妥当。

⇒ リーマン幾何（重力場）とラプラシアン（伝播・拡散系）に注目！

リーマン幾何 smooth, continuous	グラフ discrete
コンパクト多様体	有限グラフ (連結, 無向, 境界なし)
非コンパクト多様体 (マルチン境界)	無限グラフ (離散マルチン境界)

従来： 並列処理等に適した人為的に設計・実現が容易で効率的な均一の素子や構造

↔ homogeneous, regular graphs

↔ 群不変性, 等周問題や体積増大度 等.

Webなど： 局所構造が異なって自律成長する系

↔ heterogeneous, scale-free nets

↔ 疎密が混在した計量空間?, 分散システム上の負荷均一化, Web上の価値伝播 等.

2 双対平坦構造を導入した Laplace-Beltrami 作用素

2.1 連続版 -場所ごとに異なる計量を導入-

$$\mathcal{L}f(x) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{ij} g^{ij}(x) \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} f(x) = - \sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \quad (1)$$

ここで,

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_h g^{hk} \Gamma_{ijh}, \quad (2)$$

である ($\Gamma_{ijh} = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_h \rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{hk}$).

さて, 双対なアファイン接続を選び, 片方の接続に関して平坦な空間構造 (implicit な双対座標系, 接続係数: $\Gamma_{ihj}^* = 0$) を導入すると,

$$\partial_i g_{jh} = \Gamma_{ijh} + \Gamma_{ihj}^* = \Gamma_{ijh}, \quad (3)$$

となる. ここで, $\partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i}$ と表記した.

一方, $\sum_j g_{jh} g^{ij} = \delta_h^i$ の両辺に ∂_i を施すと, 各 i, h について

$$\sum_j (\partial_i g_{jh} g^{ij} + g_{jh} \partial_i g^{ij}) = 0.$$

上式に $[g^{hk}]$ をかけ (\sum_h をとる), 式 (2) と (3) を使って,

$$\sum_j \left\{ \sum_h g^{hk} \partial_i g_{jh} g^{ij} + \sum_h g^{hk} g_{jh} \partial_i g^{ij} \right\} = \sum_j (\Gamma_{ij}^k g^{ij} + \delta_j^k \partial_i g^{ij}) = 0,$$

となる (各 i, k について).

よって,

$$\partial_i g^{ik} = - \sum_j \Gamma_{ij}^k g^{ij}, \quad (4)$$

を得る. このとき, 式 (1) は以下のように書き直せる¹.

$$\mathcal{L}f(x) = - \sum_{ij} g^{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{ik} \partial_i g^{ik}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^k}. \quad (5)$$

¹ あるいは式 (1) から離れて, $\partial_i g^{ik} = - \sum_{j,h} g^{hk} \partial_i g_{jh} g^{ij}$ は Levi-Civita 接続や双対接続に対して, $\partial_i g^{ik} = - \sum_{j,h} g^{hk} g^{ij} (\hat{\Gamma}_{ijh} + \hat{\Gamma}_{ihj})$ や $\partial_i g^{ik} = - \sum_{j,h} g^{hk} g^{ij} (\Gamma_{ijh} + \Gamma_{ihj}^*)$ などを考えていることに相当する. 但し, これは Laplace-Beltrami 作用素に付加項を持つ共役作用素 A, A^* になる.

2.2 離散版 -既存のラプラシアンとの比較-

$i = k, g^{ij} = 0$ の場合² : $\Delta g^{ii}(u) \stackrel{\text{def}}{=} g^{ii}(v) - g^{ii}(u),$

$$- \sum_{v \sim u \in E} g^{ii}(u)(f(v) - f(u)) - \sum_{v \sim u: e_i, \bar{e}_i \in E} \Delta g^{ii}(u) \frac{f(v) - f(u)}{2}, \quad (6)$$

$$= - \sum_{v \sim u \in E} \frac{g^{ii}(v) + g^{ii}(u)}{2} (f(v) - f(u)). \quad (7)$$

重み付きグラフ上のラプラシアンに幾何学的な解釈を与えた拡張版！

仮に, Levi-Civita 接続で式 (1) の \mathcal{L} を定義したと考えると, 式 (5) の第 2 項が $\frac{\partial_i g^{ii}}{2} \partial_i f$ となってしまう, 類似した形だが離散版との対応が悪い ($\times \frac{1}{2}$ 分が邪魔). ゆえに, 式 (1) で双対平坦な場合と考えた方が妥当.

F.R. Chung (幾何学的解釈は特でない):

$$Lf(u) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{v \sim u} w(u, v) (f(v) - f(u)),$$

$$\mathcal{L}_w f(u) = T^{-\frac{1}{2}} L T^{-\frac{1}{2}} f(u) = - \frac{1}{\sqrt{\text{deg}(u)}} \sum_{v \sim u} w(u, v) \left(\frac{f(v)}{\sqrt{\text{deg}(v)}} - \frac{f(u)}{\sqrt{\text{deg}(u)}} \right),$$

$T = \text{diag}\{\text{deg}(u)\}, w(u, v) = w(v, u) > 0$ とする.

砂田 (調和振動子のバネモデルの一般化):

$$\Delta_P f(u) \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{1}{m_V(u)} \sum_{v \sim u} m_E(e_i) (f(v) - f(u)),$$

E の有向辺を $e_i : [u, v], m_E(e_i) = m_E(\bar{e}_i)$ とする (\bar{e}_i は逆向き辺).

< 対応関係 >

$$\begin{array}{lcl} \forall g^{ii}(v), g^{ii}(u) > 0, & \rightarrow & w(u, v) \text{ は一意.} \\ \text{内分比の自由度.} & \leftarrow & \\ \text{同等} & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \Leftarrow \\ \Rightarrow \\ \text{条件付} \\ \text{場所不変: } \Delta g^{ii}(u) = 0. \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} m_V(u) = m_V(v) \\ w(u, v) = \frac{m_E(e_i)}{m_V(u)}, \\ g^{ii}(v) = g^{ii}(u) = \frac{m_E(e_i)}{m_V(u)}, \end{array}}$$

² $i \neq k, g^{ij} \neq 0$ の場合は, 後に示すグリーンの公式を満足する \mathcal{L} の離散対応がうまく見つからない. 多様体の接平面上の座標軸の移動が, グラフにおける隣接辺の制限によって対応しないため? 又, このような辺の相互作用まで考えることは, 応用上複雑すぎてメリットが低いのでは.

3 グリーンの公式と最大最小の定理

3.1 グリーンの公式 (連続版)

コンパクトな多様体 M 上の C^∞ 関数 f_1, f_2 を考える ($g^{ij} \neq 0$).
式 (5) が,

$$\mathcal{L}f = -\sum_{i,j} (g^{ij} \partial_i \partial_j f + \partial_i g^{ij} \partial_j f) = -\text{div}(\text{grad}_G f),$$

であることと, 余境界作用素 (または勾配) df の内積の定義より,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \partial_i (g^{ij} \partial_j f_1 f_2) &= \sum_{i,j} \{ \partial_i g^{ij} \partial_j f_1 f_2 + g^{ij} \partial_i \partial_j f_1 f_2 + g^{ij} \partial_j f_1 \partial_i f_2 \}, \\ &= -(\mathcal{L}f_1 f_2 - \langle df_1, df_2 \rangle_G), \end{aligned}$$

となる. 体積に関する測度 $\sqrt{\det(g_{ij})} dx$ に固執せず, $\int_M dx$ を両辺に施すと, M がコンパクトであることから左辺は零になる. 同様に,

$$\sum_{i,j} \{ \partial_i (g^{ij} \partial_j f_1 f_2) - \partial_j (g^{ij} f_1 \partial_i f_2) \} = -(\mathcal{L}f_1 f_2 - f_1 \mathcal{L}f_2),$$

に対して両辺の積分 $\int_M dx$ をとると, 左辺は零になる.

ゆえに, 以下のグリーンの公式を得る³.

$$\int_M \mathcal{L}f_1 f_2 dx = \int_M \langle df_1, df_2 \rangle_G dx = \int_M f_1 \mathcal{L}f_2 dx.$$

この \mathcal{L} は, 従来とは別の内積を考えたことに相当する測度 dx のもとで自己共役な作用素で, 以下の共役作用素 A, A^* とは明らかに異なる (b^i の正負の符号のため). 式 (9) は Levi-Civita 接続による作用素 (1).

$$\begin{aligned} \int_M A f_1 f_2 \sqrt{\det(g_{ij})} dx &= \int_M f_1 A^* f_2 \sqrt{\det(g_{ij})} dx, \\ A f &\stackrel{\text{def}}{=} -\text{div}_G(\text{grad}_G f) + \sum_i b^i \partial_i f, \\ A^* f &\stackrel{\text{def}}{=} -\text{div}_G(\text{grad}_G f) - \sum_i \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \partial_i (\sqrt{\det(g_{ij})} b^i f), \\ &= -\text{div}_G(\text{grad}_G f) - \sum_i (\partial_i \sqrt{\det(g_{ij})}) b^i f - \sum_i (\partial_i b^i) f, \\ -\text{div}_G(\text{grad}_G f) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_i \partial_i (\sqrt{\det(g_{ij})} \text{grad}_G f), \quad (8) \\ &= -\sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \hat{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

³ 系: $f_2 = 1$ の時, $\int_M \mathcal{L}f_1 dx = 0$, $f_1 = f_2$ の時, $\int_M \mathcal{L}f_1 f_1 dx = \int_M \langle df_1, df_1 \rangle_G dx \geq 0$.

3.2 グリーンの公式 (離散版)

有限な連結・無向グラフ (V, E) 上で 2.2 節の $\mathcal{L}f(u)$, $u \in V$ を考える. ここで, E は両方向の全ての有向辺の集合, $E_u \subset E$ は頂点 u に隣接する有向辺 (ある 1 つの向きを持つ) の集合とする.

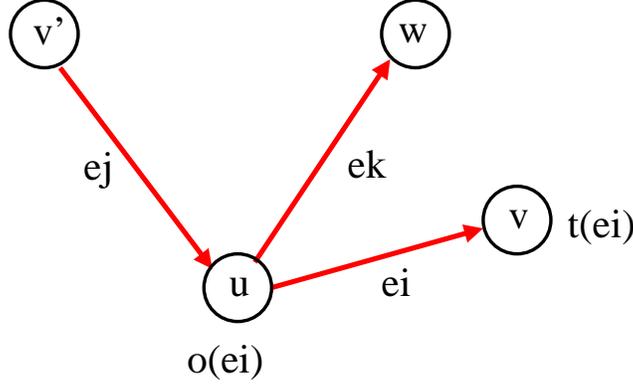


図 1: 有向辺と始終点

さて, $i = k$ で g^{ii} のみの場合を考えよう. V 上の関数 $f_1(u)$, $f_2(u)$ について, 以下のグリーンの公式:

$$\frac{1}{2} \sum_{u \in V} \langle df_1, df_2 \rangle_G = \sum_{u \in V} \mathcal{L}f_1(u) f_2(u) = \sum_{u \in V} f_1(u) \mathcal{L}f_2(u), \quad (10)$$

が成り立つことを示す. ここで, u の隣接辺 e_i と \bar{e}_i に関する計量 g^{ii} が付くことを G_u で表し, E 上の関数 df_1, df_2 (辺方向の f_1, f_2 の勾配) についての内積を以下のように定義する ($\times \frac{1}{2}$ は辺を 2 重に数え上げてる為).

$$\begin{aligned} \langle df_1, df_2 \rangle_G &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \langle df_1, df_2 \rangle_{G_u}, \\ \langle df_1, df_2 \rangle_{G_u} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e_i: u \rightarrow v \in E_u} g^{ii}(u) (f_1(v) - f_1(u))(f_2(v) - f_2(u)) \\ &\quad + \sum_{\bar{e}_i: v \rightarrow u \in E_u} g^{ii}(u) (f_1(u) - f_1(v))(f_2(u) - f_2(v)). \end{aligned}$$

まず, $\sum_u \langle df_1, df_2 \rangle_{G_u}$ において, u に入る辺 e_i と出る辺 e_j に関する項をそれぞれみると,

$$\begin{aligned} u \rightarrow v: & \quad g^{ii}(u) \times \left\{ \underline{(f_1(v)f_2(v) - f_1(u)f_2(v))} + (-f_1(v)f_2(u) + f_1(u)f_2(u)) \right\}, \\ v' \rightarrow u: & \quad g^{jj}(v') \times \left\{ (f_1(v')f_2(v') - f_1(u)f_2(v')) + \underline{\underline{(-f_1(v')f_2(u) + f_1(u)f_2(u))}} \right\}, \end{aligned}$$

となる.

一方, 上記に対応する $\sum_{u \in V} \mathcal{L} f_1(u) f_2(u)$ における式 (6) の第 1 項の u に関する項は⁴,

$$u: g^{ii}(u) \times (-f_1(v) f_2(u) + f_1(u) f_2(u)) + g^{jj}(u) \times \underline{(-f_1(v') f_2(u) + f_1(u) f_2(u))},$$

$$v: g^{ii}(v) \times \underline{(-f_1(u) f_2(v) + f_1(v) f_2(v))},$$

$$v': g^{jj}(v') \times (-f_1(u) f_2(v') + f_1(v') f_2(v')),$$

となり⁵, これらが互いに等しくなるには式 (6) の第 2 項が,

$$2 \text{重下線の } u \text{ について: } (g^{jj}(v') - g^{jj}(u)) \times (f_1(u) - f_1(v')),$$

$$1 \text{重下線の } v \text{ について: } (g^{ii}(u) - g^{ii}(v)) \times (f_1(v) - f_1(u)),$$

を含めば良い. すなわち, 式 (6) の第 2 項が u に関して,

$$- \sum_{v' \rightarrow u: e_j \in E_u} \Delta g^{jj}(u) (f_1(v') - f_1(u)), \quad (11)$$

$$\Delta g^{jj}(u) = g^{jj}(v') - g^{jj}(u) = g^{jj}(o(e_j)) - g^{jj}(t(e_j)),$$

となれば良い (v, v' に関しても同様). これは, 計量 g^{jj} の j 方向の変化量という意味にも合致する.

同様に, \bar{e}_i や \bar{e}_j についてみると v と v' の役割が入れ替わり, 式 (10) 右辺 $\times 2$ により隣接辺で各頂点のペアを 2 重に考えていることから, 式 (6) の第 2 項が u に関して,

$$- \sum_{v \rightarrow u: \bar{e}_i \in E_u} \Delta g^{ii}(u) (f_1(v) - f_1(u)), \quad (12)$$

$$\Delta g^{ii}(u) = g^{ii}(v) - g^{ii}(u),$$

となれば良い. ここで, 式 (11) と (12) はそれぞれ別々の辺 (u に入る辺 e_j と出る辺 e_i の集合) を対象としていることに注意.

ゆえに, 式 (10) 左辺の $\frac{1}{2}$ 分を換算したグラフ上の Laplace-Beltrami 作用素 (6) について, グリーンの公式 (10) が成立する. f_1 と f_2 を左右入れ替えても同様である.

⁴ 辺の向きを 1 つ定めているので, v から出る, あるいは v' に入る辺は u とは無関係で, 別の頂点とのペアを同様に考えれば良い.

⁵ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$, $\frac{\partial f}{\partial x^k}$ に対応するグラフ上の差分は格子上のそれらに対応するよう, $f(v) - f(u)$, $\frac{1}{2}(f(w) - f(u))$ とした.

3.3 最大最小の定理

境界(条件)のない有限な連結(無向)グラフ (V, E) において,
 $\forall u \in V, \mathcal{L}f(u) = 0$ を満たす \mathcal{L} -調和関数 $f(u)$ は定数である.

[証明]: V 中で $f(u)$ が最大値と仮定する(最小値でも以下同様). また,
この頂点 u の隣接点 $v \sim u$ における最大値を $f(v')$ とする.

\mathcal{L} -調和関数は, $w(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g^{ii}(u) + g^{ii}(v)}{2} > 0, \forall u \in V$ に対して,

$$-\sum_{v \sim u} w(u, v)(f(v) - f(u)) = 0 \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} \sum_{v \sim u} w(u, v) f(v),$$

を満たすものであることから,

$$f(u) = \frac{1}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} \sum_{v \sim u} w(u, v) f(v) \leq \frac{\sum_{v \sim u} w(u, v)}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} f(v') = f(v'),$$

となり, $f(u)$ の最大値性の仮定により $f(u) = f(v')$ となる(不等号の
場合は仮定に矛盾).

一方, $f(u)$ の最大値性と $w(u, v) > 0$ により,

$$\mathcal{L}f(u) = -\sum_{v \sim u} w(u, v)(f(v) - f(u)) = \sum_{v \sim u} w(v, v')(f(v') - f(v)) \geq 0,$$

における和の各項が非負となるので, $f(u)$ が \mathcal{L} -調和であるには, $\forall v \sim u$
に対して, $f(u) = f(v) = f(v')$ でなければならない. グラフは連結なので隣接する全ての頂点でこれが成り立つ.

ゆえに, $f(u)$ は定数となる [QED].

\Rightarrow 連続版に関しては, Levi-Civita 接続による作用素 (9) の場合と同様に,
 u の開近傍で f が定数となることを示す.

4 拡散方程式としての性質

$$\frac{\partial h(u, t)}{\partial t} = -\mathcal{L}h = \text{div}(\text{grad}_G h), \quad (13)$$

$\text{div}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \partial_i X^i$, $\text{grad}_G f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j} g^{ij} \partial_j f \partial_i$.

$h(u, t) = f(u) \times g(t)$ と変数分離できるとして、上式の両辺に $-\frac{1}{fg}$ をかけると、

$$-\frac{\partial g / \partial t}{g} = \frac{\mathcal{L}f}{f} = \lambda,$$

となる⁶.

ゆえに、固有値問題 $\mathcal{L}f = \lambda f$ と、 $\dot{g} = -\lambda g \Rightarrow$ 解: $g(t) = c \cdot e^{-\lambda t} + d$ を得る.

性質 1: $\forall u \in V$, $f(u) = 1$ あるいは定数関数は、固有値 0 に対する解 (固有ベクトル) である.

性質 2: 計量行列 $[g^{ij}]$ の正定値性より、 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots$ となる.

拡散速度を評価する際の最も遅い成分に対応する第 2 固有値は、

$$\lambda_G \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 = \inf_{f \perp 1} \frac{\langle \mathcal{L}f, f \rangle}{\langle f, f \rangle} = \inf_{f \perp 1} \frac{\langle df, df \rangle_G}{\langle f, f \rangle}.$$

性質 3: $t \rightarrow \infty$ での平衡解は、 \mathcal{L} -調和関数: 定数となり、局所的には

$$f(u) = \sum_{v \sim u} \frac{w(u, v)}{\sum_{v \sim u} w(u, v)} f(v),$$

を満たす (重み付き平均化, 平滑化).

性質 4: 拡散方程式 (13) は総負荷量 $\text{Cost} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u \in V} h(u, 0)$ を保存する. すなわち、各時刻 t において、 $\int_M \text{div}(X) dx = 0$ あるいは、

$$\sum_{u \in V} \frac{\partial h(u, t)}{\partial t} = - \sum_{u \in V} \mathcal{L}h(u, t) = \sum_{u \in V} \sum_{v \sim u} w(u, v) (h(v, t) - h(u, t)) = 0.$$

性質 5: 平衡解への単調減少性 (離散版では Δt が十分小の時)

$$\frac{d \sum_u (\text{Cost}/|V| - h(u, t))^2}{dt} = 2 \sum_u (\text{Cost}/|V| - h) \times (\mathcal{L}h) \leq 0.$$

⁶ 左辺と右辺はそれぞれ x と t の別々の変数に対する関数なので、それらが等しくなるため定数.

5 分散サーバの負荷均一化への応用例

特定の回線や上下方向（非対称）で伝播効率（帯域幅や通信速度など）が異なる現実的なネットワーク上の均衡化問題に広く応用され得る。

(a) Tree	固有値	λ_G
$w(2,4) \times 0.5$	0, 0.267, 1, 1, 3, 3.732	0.267
normal	0, 1, 1, 3, $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$	0.438
$w(2,4) \times 2$	0, 1, 1, 3, $\frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$	0.627
$w(2,4) \times 4$	0, 1, 1, 3, $\frac{11 \pm \sqrt{89}}{2}$	0.789
(b) Net	固有値	λ_G
$w(2,4) \times 0.5$	0, 0.267, 3, 3, 3, 3.732	0.267
normal	0, 3, 3, 3, $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$	0.438
$w(2,4) \times 2$	0, 3, 3, 3, $\frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$	0.627
$w(2,4) \times 4$	0, 3, 3, 3, $\frac{11 \pm \sqrt{89}}{2}$	0.789
(c) NetII	固有値	λ_G
Tree $\times 0.5$	0, 0.219, 1.5, 2.28, 2.5, 2.5,	0.219
Tree $\times 2$	0, 4, 4, 6, $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$	0.876
Tree $\times 4$	0, 6, 6, 12, $\frac{10 \pm 2\sqrt{17}}{2}$	1.752

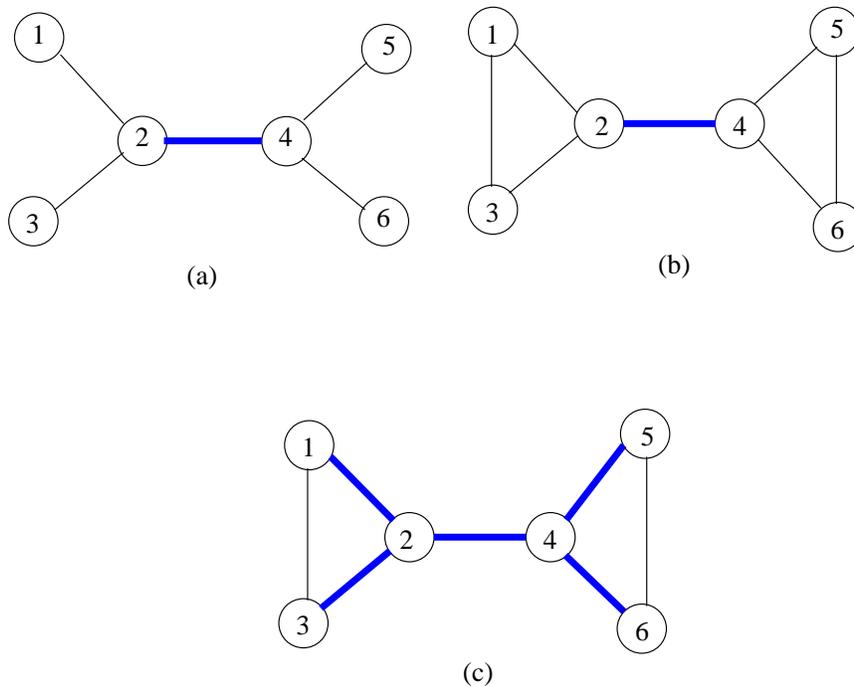


図 2: ネットワークグラフ（太線：ボトルネックな経路などを重み付け）

- 初期値 i0: [10, 6, 10, 4, 12, 8]
- 初期値 i1: [10, 10, 6, 4, 8, 12]
- 初期値 i2: [15, 3, 1, 20, 2, 19] よりアンバランスな初期負荷
- 初期値 i3: [1, 2, 2, 10, 20, 25] 左右の初期負荷がアンバランス

シミュレーション結果

1. (a) 木と (b)(c) ネットワークとの比較では, 後者の方が収束が速い (バイパス効果). 但し, 初期値によっては, ほとんど差がない場合もある (i3).
2. ボトルネックとなる辺の重み $w(2, 4)$ を大きくする程, 収束特性が改善される (特に初期の減衰で).
3. より大きな固有値を持つ (c) が最も優れている.

($\Delta t = 0.1$ とした拡散方程式を $\sum_u (Cost/|V| - h(u, t))^2$ で評価)

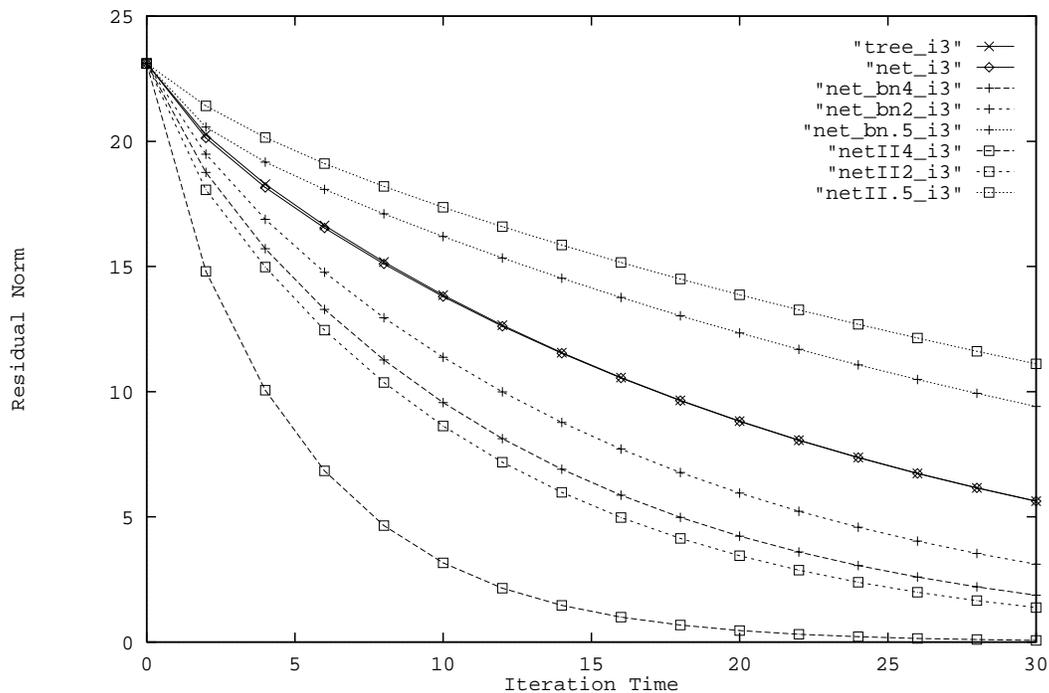


図 3: 収束特性 (初期値 i3)

6 まとめ

- 双対平坦構造を導入した Laplace-Beltrami 作用素の, 連続版と離散版をそれぞれ考え, 既存の Levi-Civita 接続に基づくラプラシアンや共役作用素, 重み付きグラフのラプラシアン等との相違点を示した.
- 上記に適した内積 (測度) の定義を与えて, グリーンの公式, 最大最小の定理を証明した.
- 上記の作用素に基づく拡散方程式の性質: 固有値の非負性, \mathcal{L} -調和関数による平衡解, 総負荷量の保存性 等を明らかにした.
- 実験例から, 辺の重み (帯域幅などに相当) によって拡散速度が向上することを確かめた.
この拡散伝播による負荷均一化は, 局所分散処理で実現できるとともに, on-line な負荷量の変動にも対処できるものと考えられる.

⇒ 今後の課題: ネットワーク構造や重みと固有値に関する理論的評価, $\partial_i g^{ik} \Leftrightarrow$ Laplace-Beltrami 作用素となるための双対平坦構造の必要性?, 分散サーバの負荷均一化処理に対する実装アルゴリズムの検討と評価, その他の均衡化問題 (国際間の貿易, 就業率や情報量などの地域格差の是正) や伝播特性の解析 (WWW 上の頁の価値伝播, サイト間のアクセス移動率) への適用, 及び, 自律成長するネットワークに対する拡張? など.

謝辞: 本研究の初期段階におきまして, 有益な御指摘を頂きました東北大学大学院情報科学研究科の浦川 肇 教授に感謝申し上げます.

< 全体の流れ >

「疎密が混在する Web に適し, その流通伝播を特徴付ける空間」
 ⇒ リーマン幾何 (重力場) とラプラシアン (伝播・拡散系) に注目!

Laplace-Beltrami 作用素:

$$\mathcal{L}f(x) = - \sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right).$$

⇓ 双対平坦構造の導入

$$- \sum_{ij} g^{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{ik} \partial_i g^{ik}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^k}.$$

⇓ 離散版 ($i = k, g^{ij} = 0$)

$$- \sum_{v \sim u \in E} g^{ii}(u) (f(v) - f(u)) - \sum_{v \sim u: e_i, \bar{e}_i \in E} \Delta g^{ii}(u) \frac{f(v) - f(u)}{2}.$$

$$\Downarrow w(u, v) = \frac{g^{ii}(v) + g^{ii}(u)}{2}$$

$$Lf(u) = - \sum_{v \sim u} w(u, v) (f(v) - f(u)).$$

性質	連続版	離散版
グリーンの公式	○ 測度 dx のもと	○
最大最小の定理	省略	○
総負荷保存性	○	○
単調減少性	○	Δt : 小の時

応用例: 分散サーバの負荷均一の高速化.

特定の回線や上下方向 (非対称) で伝播効率 (帯域幅や通信速度など) が異なる現実的なネットワーク上の均衡化問題に広く適用可.

連絡先 yhayashi@jaist.ac.jp, <http://www.jaist.ac.jp/~yhayashi>