

数学教育における計算機を用いた知識活用に関する研究 ～東アジア諸国との比較を通して～

A Study of Applying Knowledge to Use Calculators in Mathematics Education ～ In Comparison with Other East Asian Countries～

津田 真秀¹⁾, 黒田 恭史²⁾
TSUDA Masahide¹⁾, KURODA Yasufumi²⁾
din45043@kyoykyo-u.ac.jp, ykuroda@kyoyko-u.ac.jp

1) 京都教育大学大学院, 2) 京都教育大学
1) Graduate School of Education, Kyoto University of Education,
2) Faculty of Education, Kyoto University of Education

【要約】数学知識の活用とは、数学という枠内にとどまらず、現実的な課題の解決を見越したものとして捉えられるべきである。その際、計算機やコンピュータといった外的機器の活用は必要不可欠であり、学習者にはそれらを適切に選択し操作することができる能力が求められる。しかし、我が国の数学教育は、暗記・習熟に重点が置かれ、数学知識の活用の概念が狭義にとらえられがちである。一方、シンガポールやベトナムでは、数学教科書内において現実事象への適用を見越した内容が豊富であり、問題を解く際に関数電卓を積極的に活用していることが明らかとなった。そこで、本研究では、我が国と東アジア諸国の数学教育の知識活用について、外的機器の使用を通じて論じ、知識活用の概念をより広義なものへ転換していく上で参考となる点を模索する。

【キーワード】数学教育 知識活用 関数電卓

1. はじめに

数学教育における知識活用とは、数学の知識や論理を用いて通常の数学問題を解決する活動や、数学の知識の活用を通して日常生活や自然現象などの解明する活動などを指す。ここでの知識活用とは、学習者の内部に記憶・蓄積された知識とともに、計算機やコンピュータなどの外部の機器の適切な選択と操作なども含まれる。実際に、現行の学習指導要領についてもこうした内容は明記されている。黒田(2008)は学習指導要領の目標の特徴について、「数学学習によって、生徒が数学の原理獲得等を目指すとともに、数学を現実の事象に適用する力や、有用性を認識し、積極的に取り組んでいく態度を育成すること」とまとめている。また、外的機器に関わる内容として、「電卓、コンピュータや情報通信ネットワークなどを活用」と明記されている。情報通信技術の発展が教育現場に及ぶ今日の社会において、様々な外的機器が安価で手に入れることが可能となっているが、その教育的効果を発揮するためには、数学教育における知識活用を通じた現実事象を創造的に解決する教育が重要である。

ところで、日本の中等教育段階における数学教科書の内容は、学習者の内部に記憶・蓄積された知識と筆記用具による表出手段を前提に設定されており、入試問題はその典型と言える。大学入試センター試験などでは、早く正確な計算技術が要求されることから、教育現場の指導では、計算技術の習熟に重点が置かれがちである。また、教科書内の演習問題では、現実事象を扱う内容も数少なく、機器を用いず手計算で解くことができる内容がほとんどである。

一方、シンガポールやベトナムでは、手計算で行う学習に加えて、小学校段階から関数電卓を使用する教育内容となっている。そのため、典型的で単純な数値だけでなく、現実事象などの解明に必要な一般的で複雑な数値を教科書内でも数多く扱っており、関数電卓の使用を前提として教育内容が編纂されている。さらに、関数電卓は卒業試験や大学入試において必須であり、通常の数学授業でも関数電卓を使用している。(日本においては、工学系など一部の学校において関数電卓が使用されている。)

本研究では、我が国の知識活用の概念を、学習者の内部に記憶・蓄積されたものとしてだけでなく、外的機器(関数電卓など)の活用をも踏まえたものへと転換していく上での示唆を、シンガポールやベトナムの数学教科書を参考に検討することを目的とする。

2. 日本における計算機活用事例

2.1 計算機活用の歴史的変遷

平成元年から 22 年度の学習指導要領においては、算数・数学において電卓使用の位置づけがあった。教科書内には概算や小数、円周率を含んだ計算などで電卓の使用を指示する記述が見られた。それらを受け、帯分数やあまりのある除法計算といった、一般の電卓より機能が向上した電卓が学校教材用に開発されていた。しかし、授業の中で電卓を使うことに対し抵抗を感じる教員が多く、ほとんど普及しなかったという報告がされている。

1998 年告示の学習指導要領に着目してみると、円周率と小数の計算、さらに電卓の使用について、現行の学習指導要領と異なる点がいくつか見られた。まず円周率については、「円周率としては 3.14 を用いるが、目的に応じて 3 を用いて処理できるよう配慮するものとする。」と記述されている。さらに小学校学習指導要領解説 (1999) では、「円周率としては 3.14 を用いるが、円周や面積の見積もりをするなど目的によっては 3 として処理していくことを取り扱うことにも配慮」と記述されている。「目的に応じて 3 を用いて」という記述は 1989 年告示の学習指導要領にも明記されているが、小数の計算についての記述については異なる。1998 年告示の学習指導要領では「小数の乗法・除法の計算は、1/10 の位までを取り扱う」ということが記述されている。この表記は 1989 年告示のものには見られないものである。つまり、円周率 3.14 は、1/100 の位になるので取り扱う際に電卓の使用が必要となったのである。実際、算数教科書の指導書では、指導上の留意点で電卓の活用について、「筆算では小数点以下 1 桁までしか扱えないため、円周率が出てくる場合は、原則として電卓を使って計算することになる。」と記述されている。

これらのことから帰結されることは、円周率において「目的に応じて 3 を用いて」という記述は、小数点 2 位以下の計算が学習指導要領から削除されたことを受けたもので、計算の際には電卓で行うか、3 で近似して行うかという学習内容となったということである。

一方、現行の教科書内においては、改訂前と比べ、電卓の使用を指示する記述が大幅に削減され、ほとんど見られなくなった。小学校段階においても電卓の使用を指示する問題がほとんどなくなり、概数の計算時に答えを確かめるときに使う問題が数問扱われている程度である。計算機を代表とする外的機器を使用しない要因として、日本の数学教科書の内容における現実事象を扱うものが数少なく、機器を用いず手計算で解くことができる内容がほとんどであることも指摘できる。

日本の算数教科書における、概算の単元で電卓を使用する問題では、概算で見積もった値と、電卓を使用して求めた実際の値を比較しているものがある。しかし、電卓の使用を指示する問題にも関わらず、手計算でも十分可能な数値であることがほとんどである。現行の算数教科書においては、乗法の計算の桁数の制限がないため、電卓の使用を指示する問題はほとんど扱われていないということである。

2.2 日本の計算指導の特徴

日本の四則計算の筆算指導は、手順を重視した計算指導が特徴的である。位の最も小さい末位から計算し、必要に応じて繰り上がり・繰り下がりといった操作を行う。学年が上がるごとに扱う数の種類が増え、桁数の多い複雑なものも扱うが、計算技術の習熟に重点が置かれているため、計算結果の妥当性を検証する活動が十分でないということが指摘されている。

こうした検討課題を踏まえ、「バラ数」という概算につながる指導が有効であるとされている。バラ数とは、数の各位の頭に単位を付して、数を数の合成と考えるとらえていく考え方である。(バラ数の考え方をもとに行う計算をバラ数計算と呼ぶ。)バラ数は数表記の一種であり、各数の上部に単位をつけることで、数の相対的な大きさを把握することに役立つものとなる。これにより、筆算において、頭位からの計算が可能となり、おおよその解に接近する概算思考につながる。図 1 はバラ数の表記とその加法の一例である。382 を表す場合、百の位に 3、十の位に 8、一の位に 2 を配置するが、バラ数では、上部の単位を変えることで、桁数を解答するために必要な単位に着目しやすい表記となる。また、バラ数を用いて頭位から計算する場合(計算結果は末位の上部が十の位のため 10320)、末位からの筆算とは違い、繰り上がりの操作を後で行うため、途中で書き直す必要がある。しかし、各位での計算はより簡易になり、計算の記述が全て残ることから、計算ミスに気づきやすいという利点がある。このように、バラ数計算により、学習者が計算の段階で概算思考を行うことができることから、概数・概算とともに扱うことで、場合に応じた計算技術の取得につながると考えられる。現行の教科書にはバラ数についての扱いはないが、このように位や桁に着目したバラ数の考え方の活用により、従来の筆算方法にとらわれない人間の見積り能力を獲得することができる。

また、頭位からの計算方法の一例として、そろばんが挙げられる。日本における伝統的な計算ツールとさ

れてきたそろばんは、現在では小学校中学年段階で扱われ、簡単な自然数や小数の計算方法について学習する。図 2 は小学校第 3 学年で学習するそろばんによる加法についての内容である。例えば、 $63+25$ を計算するときは、先に 20 を加え、その後 5 を加えるという順序となっている。

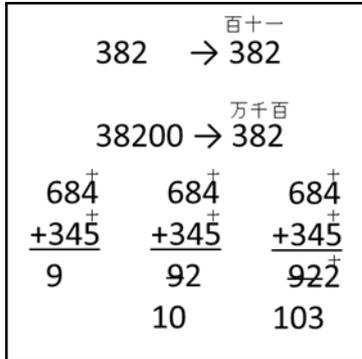


図 1：バラ数表記とその加法

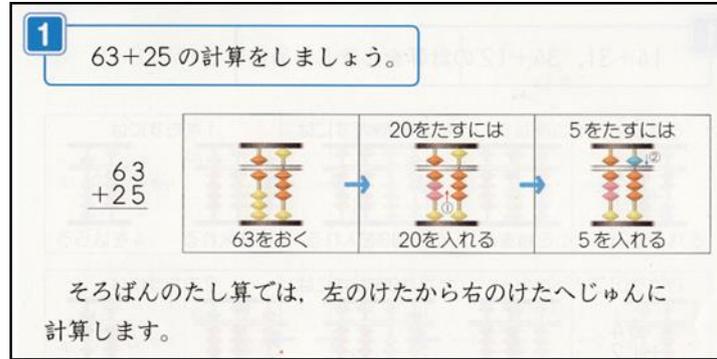


図 2：そろばんを用いた加法（小学校第 3 学年）

3. 東アジア諸国との比較

3.1 シンガポールにおける関数電卓活用事例

シンガポールの算数・数学教科書を分析した結果、小学校段階では低学年で暗算、中学年で概算・見積りについて詳細な記述があり、豊富に扱われていることが明らかとなった。ここでいう暗算は、単に筆算せず、頭の中で計算するだけでなく、概算・見積りへの接続を意図したもののことを指す。例えば、図 3 は「 $94+97$ 」を暗算する問題である。（小学校第 3 学年）ここでは与えられた数を 100 ととらえ、合わせて 200 とした後、大きく見積もった分を引く、解を求めている。このような概算につながる内容は、計算結果を予測する習慣をつける意図があると考えられる。小学校第 1 学年から、手計算の学習に加え、こうした暗算を学習する単元がある。

その後、第 4 学年で、整数の四則演算の見積りを学習している。加法・減法の見積りは、与えられた二つの数の末位を四捨五入し、乗法の見積りは被乗数を四捨五入して計算結果を見積りしている。練習問題では、先に筆算で答えを求め、その後見積りを実行し、計算結果を見積りした値を比べ「answer is reasonable」としている。除法の見積りも、上限値と下限値を設定し、計算した結果がその数値の範囲内に収まるかどうかで妥当性を検証している。例えば、図 4 のように「 $372 \div 4$ 」を計算するとき、「 $360 \div 4$ 」と「 $400 \div 4$ 」を考える。このとき 360 のほうが 372 に近いということから、「 $372 \div 4$ is about 90」としている。このとき、見積もった数値を除数で割り切れるような数にしていることがわかる。

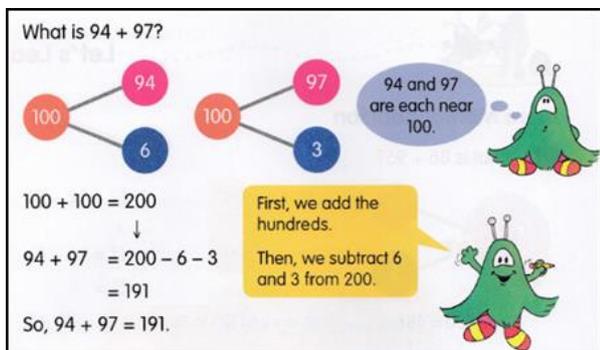


図 3：2 位数同士の加法の暗算
(シンガポール小学校第 3 学年)

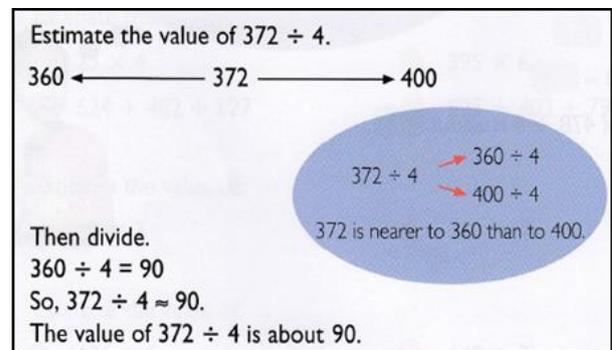


図 4：解の挟み込み
(シンガポール小学校第 4 学年)

シンガポールでは小学校第 5・6 学年で関数電卓が導入され、教科書の表紙に記載されている。第 5 学年の教科書には関数電卓の具体的な使い方を学習する単元があり、電卓のキー操作の仕方や順番が細かに説明され、多くのページが割かれている。関数電卓の使い方、機能について学習したあとは、他の単元でも数値計算に関数電卓を用いて答えを求める。例えば、関数電卓を用いて出した計算結果と見積

りを比較して検証する練習問題や、図形の求積で円周率や立方根を含んだ計算を関数電卓で行う問題などである。教科書内では、関数電卓を使用しないと解けないような複雑な数計算を必要とする問題が複数扱われていて、学習において関数電卓の使用が前提となっていることがわかる。演習問題には、電卓マークが記載され、関数電卓の使用を指示している問題が多数扱われていて、算数の授業において積極的に活用されていることがうかがえる。

中等学校においても、関数電卓を使用する単元が存在する。第 1 学年では、平方根や累乗根、負の数を含んだ計算を関数電卓で計算する手順が示されている。ここで扱われている数は自然数表記に変換できるものも含まれているが、演習問題などでは、無理数を有理数表記に変換している記述が多い。これは、無理数が数直線上のどの位置にあるか、つまり、数の大小感覚を身に付けるためであると考えられる。第 3 学年では、指数についての基本的な性質や計算などを学習したあと、関数電卓を用いて計算結果を求める内容がある。

このように中等学校では、小学校で学習した関数電卓の基本的な使い方に加え、連続した累乗根や高次の指数など、関数電卓を使用しないと計算することができないような問題が複数扱われている。連続した累乗根の問題は、関数電卓と一般の電卓を使用し、結果にどのような違いがあるかを検証している。高次の指数の問題では、手計算で解く方法と関数電卓を用いた解法を比べる活動を行っている。

以上のことから、シンガポールの数と計算、代数領域の学習において関数電卓の活用が前提であり、小学校段階から解の検証、見積りといった活動が重視されていることがわかる。

また、中学校第 2 学年で三角比を学習し、第 3 学年で弧度法を学習する。これらの単元の中には、図 5 のような、代表的な角度以外の場合に関数電卓を使用して計算する問題が複数扱われている。この問題は、余弦定理を活用して三角形の辺の長さを求める段階で、 $\cos 74^\circ$ を使用しなければならない。教科書には求める辺を二乗した値を小数点以下 3 桁まで表記し、その後値を有効数字三ケタまで近似している。いずれの計算も手計算では困難であるが、こうした場合に関数電卓を使用していると考えられる。実際教科書には、三角比の導入後、関数電卓を用いて値を求める手順を記したキー操作や演習問題が掲載されている。三角比の単元では、ほとんどが代表的な角度以外を扱った演習問題となっていることに加え、現実事象を扱った問題も多いことから、三角比の相互関係による式変形よりも、測量を重視していると考えられる。

一方日本では、三角比の単元に着目すると、演習問題の多くは計算が比較的容易となる 30° 45° 60° といった代表的な角度のみで、三角比の相互関係による式変形が重視されている。例えば、図 6 のように余弦定理を用いて三角形の辺を求める問題では、 $\cos 60^\circ$ のような代表的な角度を用いるため、計算結果も簡易なものとなる。代表的な角度以外を扱う場合は、三角比表を用いて数値を調べるが、扱われている問題はわずかで、表と対応する数値を見つけて答えるという簡易なものばかりである。

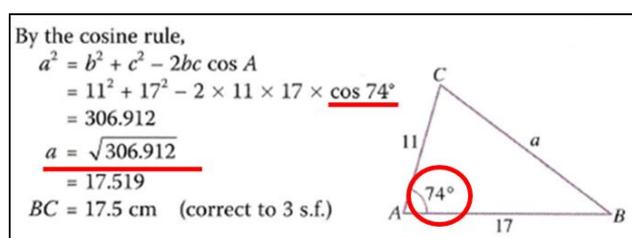


図 5：余弦定理に関する問題
(シンガポール中等学校第 2 学年)

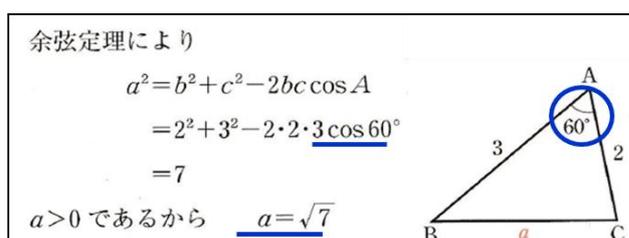


図 6：余弦定理に関する問題
(日本高等学校第 1 学年)

3.2 ベトナムにおける関数電卓活用事例

ベトナムでは、小学校高学年段階で関数電卓を各自で購入し、全員が所持している。中等学校以降から数学の授業での関数電卓の使用頻度が高くなる。

教科書の中では、CASIO fx-220 の関数電卓が掲載されている。タイプとしてはかなり古いものである。計算する対象と、関数電卓のキー操作の仕方、解答が示されていて、その後練習問題を扱う流れとなっているものが多い。

松崎 (2014) は、ベトナムの高等学校における数学教育の特徴として、「生徒は関数電卓を常時使用すること」を挙げている。このように関数電卓を使用した教育が可能であるのは、高等学校の卒業試験や大学入試においても関数電卓を使用するからだと考えられている。中等学校段階において、数学の授業での関数電卓の使用は、手計算で可能な計算だけでなく、関数電卓でしかできないような計算も多く

扱っている。

小学校と同様に、中学校においても各内容を日本より早い学年で扱っている場合が多い。ベトナムでは、ベトナムでは、中学校段階で二次方程式を学習し、判別式も扱われている。二次方程式の解法について学習した後、解を代入する際の計算に関数電卓を用いる記述がある。例えば「 $3x^2-3.5x+2$ 」という二次式に「 $x=4.13$ 」を代入すると「38.7175」という数値となる。手計算でも可能な数値ではあるが、こうした具体的な数値を代入する際に関数電卓を使用することで、二次方程式の解への予測・接近を意図している可能性がある。

また、判別式を学習後、図 7 のように関数電卓を使用して判別式を計算する問題が扱われている。ここでは、判別式の計算の手順と関数電卓のキー操作が併記されている。章末の演習問題では、桁数の大きいものや根号の係数を持つ複雑な二次方程式を扱っていることから、手計算ではなく、関数電卓を用いて判別式を計算していると考えられる。

一方日本では、因数分解や展開などの代数的な操作簡易な数が扱われている場合が多い。例えば、判別式の学習は図 8 のように、二次方程式の係数がすべて整数であり、計算が容易な簡単な数を扱っている。

Vi dụ. Giải phương trình $3x^2 - 4x - 7 = 0$.

• Tính Δ

$4 \quad + / - \quad \text{SHIFT} \quad x^2 \quad - \quad 4 \quad \times \quad 3 \quad \times \quad 7 \quad + / - \quad =$

(Máy cho kết quả là 100, vì $100 > 0$ nên ta thực hiện tiếp việc tìm nghiệm).

a) $15x^2 + 4x - 2005 = 0$; b) $-\frac{19}{5}x^2 - \sqrt{7}x + 1890 = 0$.

図 7：二次方程式の判別式に関する問題
(ベトナム中学校第 3 学年)

例 12 二次方程式 $x^2 - 5x + 3 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13 > 0$$

であるから、この二次方程式の実数解の個数は 2 個である。

練習 29 次の二次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (2) $2x^2 - x + 2 = 0$ (3) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

図 8：二次方程式の判別式に関する問題
(日本高等学校第 1 学年)

4. まとめ

日本の数学教育における計算機活用の現状として、指導者側が電卓使用に消極的であり、数と計算領域の指導においては手計算の早さや正確さが重視されている。過去には電卓の使用が盛んな時期もあったが、学習指導要領の改定による内容削減の余波を受けた結果であり、外的機器の適切な操作法の獲得や、算数の知識を外在化する素地の獲得といった教育的効果を必ずしも意図したものではなかった。

また、計算指導についてまとめると、筆算、バラ数、そろばんといった計算方法・指導については、指導者側が持ち合わせることによる、従来の筆算指導に依存しない、柔軟な計算能力を学習者に獲得させることができると考える。情報通信技術の発展が教育現場にも及ぶ中、電卓をはじめとする外的機器の活用を含めた新たな計算指導のあり方を検討する必要があると考えられる。

シンガポール・ベトナムの数学教育における計算機活用の特徴をまとめると、以下ようになる。

【シンガポールにおける計算機活用の特徴】

- ・数と計算領域において、小学校低・中学年段階では暗算や見積りが重視され、詳細に計算の手順などが記載されている。
- ・小学校第 5 学年から関数電卓を使用する単元が登場し、教科書内では関数電卓の使用を指示する問題が多数扱われている。
- ・中学校段階では、桁数の多い複雑な計算、手計算では解くことができない問題などが多数扱われ、関数電卓の使用を前提に教科書が編纂されている。

【ベトナムにおける計算機活用の特徴】

- ・中学校段階以降、関数電卓を本格的に使用する。(小学校高学年段階で関数電卓を各自購入しているところもある。)
- ・関数電卓の使用方法についての記述や、複雑な数値計算を必要とする問題は扱われているが、一問一答形式がほとんどである。

【計算機活用の共通点】

- ・数の拡張について学習する際に関数電卓を使用する。ここでは、無理数からの有理数表記への変換、四則混合や桁数の多い難度の高い計算、関数電卓を使用しないと計算することができないような、複雑な数値計算を必要とする問題が複数扱われている。
- ・代数分野に加え、幾何分野においても積極的に関数電卓を使用している。特に、三角比の単元では、代表的な角度以外を扱う際に関数電卓を使用していることから、現実場面への数学の適用を意図していると考えられる。実際、演習問題は現実場面を取り扱ったものが多い。

シンガポールの教科書では関数電卓の使用について、比較的多くのページ数が割かれていた。ベトナムの教科書では、関数電卓の使用の際は、一つの問題や式に対して一度答えを求めるだけの形式が多いのに対し、シンガポールの教科書では、それぞれの問題に厚みがあり、一度求めた数を繰り返し問題の中で使用する形式が多いことから、数学の厳密さやその手順などを意識していると考えられる。

今後の算数・数学教育における知識活用を検討するにあたっては、教科書内に外的機器の使用に関する記述を導入することや、活用には、人間と機械の役割を明確にする必要があると考えられる。

参考文献

- 文部科学省 小林一光, “中学校学習指導要領解説 数学編”, 教育出版, 2008 年
横地清, 新版 2 世紀への学校数学への展望, 誠文堂新光社, 東京: 3, 1998 年
渡邊伸樹, 第 4 章 数と計算; 黒田恭史編著, 初等算数科教育法, ミネルヴァ書房, pp.55-58, 2010 年
黒田恭史 編著, 数学教育の基礎, ミネルヴァ書房, pp.19-25, 2011 年
横地清, 教師は算数授業で勝負する, 明治図書, 2006 年
Esther Ng Yoon Cheng, “discocering MATHEMATICS1A-3B”, Star Publishing ptd Ltd, 2007 年
黒田恭史, シンガポールの「数と計算」の教育における特徴, 数学教育学会誌, pp.121-130, 2012 年
津田真秀・黒田恭史, シンガポールの数と計算・代数教育の特徴, 第 18 数学教育学会大学院生部会, pp.12-16, 2014 年
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM, “TOÁN 6 TẬP MỘT -9 TẬP HAI”, 2013 年
松崎和孝, ベトナムの高等学校における数学教育の状況に関する研究に関する研究, 数学教育学会誌, pp.43-52, 2014 年
津田真秀・松崎和孝・黒田恭史, 小学校における文字式指導に関する研究～東アジア諸国の教科書を参考にして～, 数学教育学会春季年会発表論文集, pp.57-59, 2015
津田真秀・黒田恭史, 日本と東アジア諸国の ICT 活用の比較研究～計算機を用いた指導方法～, 教育システム情報学会第 40 回全国大会論文誌, pp.247-248, 2015 年
理系人のための関数電卓パーフェクトガイド, 遠藤真守, とりい書房, 2013 年

連絡先

住所: 〒612-8522 京都府京都市伏見区深草藤森町 1 京都教育大学

名前: 津田真秀

E-mail: din45043@kyokyo-u.ac.jp