I211 数理論理学 2000 年 I-1 学期 中間試験 問題

文責:大和谷 潔 (http://www.jaist.ac.jp/~kiyoshiy)

平成 13 年 5 月 31 日

1 問題

問題 1 以下の定義を与えよ。

1. 論理式 A が充足可能である。
2. 論理式 A がトートロジーである。
3. LK の式 $A_1, \ldots, A_m \;\to\; B_1, \ldots, B_n$ がトートロジーである。

問題 2 真理値表を用いて論理式 $(p \supset q) \supset (\neg p \vee q)$ がトートロジーであることを示せ。

問題 3 以下が正しければ証明し、誤りであれば凡例を挙げよ。

1. A と B がともにトートロジーであれば $A \wedge B$ もトートロジーである。
2. A と B がともに充足可能であれば $A \wedge B$ も充足可能である。
3. 結合子 $\neg$ を含まない論理式は充足可能である。

問題 4 推論規則 ($\supset$ 右) が健全であること、すなわち、$A, \Gamma \to \Delta, B$ がトートロジーなら、$\Gamma \to \Delta, A \supset B$ もトートロジーであることを示せ。

問題 5 $\to (A \supset B) \supset (\neg A \vee B)$ の証明図を与えよ。(exchange 規則は適宜省略してよい。)

問題 6 $\Gamma \to A \wedge B$ が証明可能なら、$\Gamma \to A$ も証明可能であることを示せ。

問題 7 ある論理式 A があって $\Gamma \to A$ と $\Gamma \to \neg A$ がともに証明可能なら、任意の論理式 B に対して $\Gamma \to B$ が証明可能であることを示せ。

2　答案 (正解とされた問題のみ)

問題 1

1. $v(A) = t$ とする付値が存在すること。
2. 任意の付値 v について、$v(A) = t$ であること。
3. 「式の左辺の各項の論理積が、式の右辺の各項の論理和を含意する」という命題が恒に真であること。つまり、$A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_m \supset B_1 \vee B_2 \ldots B_n$ という命題が任意の付値に対して真となること。

問題 2

p	q	$p \supset q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \supset q) \supset (\neg p \vee q)$
t	t	t	f	t	t
t	f	f	f	f	t
f	t	t	t	t	t
f	f	t	t	t	t

問題 3

1. $A \wedge B$ がトートロジーでないと仮定すると、$v(A \wedge B) = f$ とする付値 v が存在する。このとき、$v(A) = f$ または $v(B) = f$ でなければならないが、これは A と B がともにトートロジーである、すなわち $v(A) = f$ または $v(B) = f$ とする付値は存在しないという前提に矛盾する。よって $A \wedge B$ はトートロジーである。
2. A を p、B を $\neg p$ とすると、A は $v(p) = t$ とする付値において、また B は $v'(p) = f$ とする付値においてそれぞれ $v(A) = t, v'(B) = t$ となり、充足可能であるが、$A \wedge B$ つまり $p \wedge \neg p$ に対して $v''(p \wedge \neg p) = t$ とする付値 v'' は存在しないので $A \wedge B$ は充足可能ではない。
3.

問題 4　$A, \Gamma \rightarrow \Delta, B$ がトートロジーであることから、任意の付値に対して、$v(A \wedge \Gamma \supset \Delta \vee B) = t$ つまり、$v(A \wedge \Gamma) = f$ または $v(\Delta \vee B) = t$ である。

1. $v(\Gamma) = t$ の場合
   (a) $v(A) = t$ のとき $v(\Delta \vee B) = t$ となる。
      i. $v(\Delta) = t$ のとき $v(\Delta \vee (A \supset B)) = t$ である。
      ii. $v(\Delta) = f$ のとき $v(B) = t$ でなければならない。このとき、$v(A \supset B) = t$ となる。よって、$v(\Delta \vee (A \supset B)) = t$ である。
   (b) $v(A) = f$ のとき $v(A \supset B) = t$ となる。よって、$v(\Delta \vee (A \supset B)) = t$ となる。

   よって $v(\Gamma) = t$ の場合、$v(\Delta \vee (A \supset B)) = t$ となるので、$v(\Gamma \supset \Delta \vee (A \supset B)) = t$ となる。

2. $v(\Gamma) = f$ の場合 $v(\Gamma \supset \Delta \vee (A \supset B)) = t$ である。

以上より、任意の付値に対して $v(\Gamma \supset \Delta \vee (A \supset B)) = t$ となる。
よって $\Gamma \to \Delta, A \supset B$ はトートロジーである。

問題 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to \neg A, A}\,\neg\text{右} \qquad B \to B}{A \supset B \to B, \neg A}\,\supset\text{左}}{A \supset B \to \neg A \vee B, \neg A}\,\vee\text{右 2}}{A \supset B \to \neg A \vee B, \neg A \vee B}\,\vee\text{右 1}}{A \supset B \to \neg A \vee B}\,concatenation\ \text{右}}{\to (A \supset B) \supset (\neg A \vee B)}\,\supset\text{右}$$

問題 6　$\Gamma \to A \wedge B$ が証明可能であるならば、健全性定理より、$\Gamma_* \supset A \wedge B$ はトートロジーとなる。

$\Gamma_* \supset A \wedge B$ がトートロジーであるので、任意の付値に対して、$v(\Gamma) = f$ または $v(A \wedge B) = t$ が成り立つ。

$v(\Gamma) = f$ のとき、$v(\Gamma \supset A) = t$。また、$v(A \wedge B) = t$ のとき、$v(A) = t$ であるので、$v(\Gamma \supset A) = t$。

よっていずれの場合でも $v(\Gamma \supset A) = t$ であるので、$\Gamma \supset A$ はトートロジーとなる。

完全性定理より、$\Gamma \supset A$ がトートロジーならば、$\Gamma \to A$ は証明可能である。

問題 7　$\Gamma \to A$ と $\Gamma \to \neg A$ がともに証明可能であるならば、健全性定理より、$\Gamma \supset A$ と $\Gamma \supset \neg A$ がともにトートロジーである。

したがって、任意の付値 v に対して、$v(\Gamma \supset A) = t$ かつ、$v(\Gamma \supset \neg A) = t$ である。

$v(\Gamma) = t$ である場合、$v(\Gamma \supset A) = t$ より $v(A) = t$。また $v(\Gamma \supset \neg A) = t$ より、$v(\neg A) = t$。しかし、$v(A) = t$ かつ $v(\neg A) = t$ とする付値は存在しない。

よって $v(\Gamma) = f$ である。

すると任意の論理式 B に対して $v(\Gamma \supset B) = t$ となる。

つまり、$\Gamma \supset B$ はトートロジーとなる。

よって、完全性定理より $\Gamma \to B$ は証明可能である。