I211 数理論理学 2000 年 I-1 学期 期末試験 問題

文責:大和谷 潔 (http://www.jaist.ac.jp/kiyoshiy)

平成 13 年 5 月 31 日

1 問題

問題 1 述語論理学の LK システムの推論規則 ($\forall$ 右) と ($\exists$ 左) を与えよ。

問題 2 $\to \forall x(B \supset C) \supset (\exists x B \supset \exists x C)$ の LK での証明図を与えよ。

問題 3 $\exists x R(x, y) \supset \forall y(P(y) \supset \neg \forall z Q(z, x, y))$ を冠頭標準形に変形せよ。

問題 4 $\mathcal{A}$ を任意の構造とし、A, B を任意の論理式とする。以下が正しければ証明し、誤りであれば反例をあげよ。(ただし、以下の「ならば」をふくむ文が曖昧であると考える場合は、「α ならば β」を「α ではないか、または β」を意味すると解釈せよ。)

1. $\mathcal{A} \models A \supset B$ ならば「$\mathcal{A} \models A$ ならば $\mathcal{A} \models B$ である」。
2. 「$\mathcal{A} \models A$ ならば $\mathcal{A} \models B$ である」ならば $\mathcal{A} \models A \supset B$ である。

問題 5 以下のそれぞれの論理式について、それが恒真ならばそれを示し、恒真でなければその論理式が偽となる構造の例を挙げよ。

1. $\forall x \exists y P(x, y) \supset \exists y \forall x P(x, y)$
2. $\exists x \forall y P(x, y) \supset \forall y \exists x P(x, y)$

問題 6 A を以下の論理式とする。

$$\forall x \neg R(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \supset R(x, z)) \wedge \forall x \exists y R(x, y)$$

1. $\mathcal{A} \models A$ となるような構造 $\mathcal{A}$ の例を与えよ。
2. A を真とするような有限な構造は存在しないことを示せ。

2 答案 (正解とされた問題のみ)

問題 1

(∀ 右)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A[z/x]}{\Gamma \to \Delta, \forall x A}$$

ただし、z が $\Gamma, \Delta, \forall x A$ に自由変数として現れていないこと。

(∃ 左)

$$\frac{A[z/x], \Gamma \to \Delta}{\exists x A, \Gamma \to \Delta}$$

ただし、z が $\Gamma, \Delta, \exists x A$ の自由変数として現れていないこと。

問題 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B \quad C \to C}{B \supset C, B \to C}\ (\supset \text{左})}{B \supset C, B \to \exists x C}\ (\exists \text{右})}{\forall x(B \supset C), B \to \exists x C}\ (\forall \text{左})}{\forall x(B \supset C), \exists x B \to \exists x C}\ (\exists \text{右})}{\forall x(B \supset C) \to \exists B \supset \exists x C}\ (\supset \text{右})}{\to \forall x(B \supset C) \supset (\exists x B \supset \exists x C)}\ (\supset \text{右})$$

問題 3

$$\begin{aligned}
&\exists x R(x, y) \supset \forall y (P(y) \supset \neg \forall z Q(z, x, y)) \\
&\quad = \quad \exists w R(w, y) \supset \forall y (P(y) \supset \neg \forall z Q(z, x, y)) \\
&\quad = \quad \forall w (R(w, y) \supset \forall y (P(y) \supset \neg \forall z Q(z, x, y))) \\
&\quad = \quad \forall w (R(w, y) \supset \forall u (P(u) \supset \neg \forall z Q(z, x, u))) \\
&\quad = \quad \forall w \forall u (R(w, y) \supset (P(u) \supset \neg \forall z Q(z, x, u))) \\
&\quad = \quad \forall w \forall u (R(w, y) \supset (P(u) \supset \exists z \neg Q(z, x, u))) \\
&\quad = \quad \forall w \forall u (R(w, y) \supset \exists z (P(u) \supset \neg Q(z, x, u))) \\
&\quad = \quad \forall w \forall u \exists z (R(w, y) \supset (P(u) \supset \neg Q(z, x, u)))
\end{aligned}$$

問題 4

問題 5

1. 恒真ではない。
   対象領域 $\mathcal{U}$ を整数とし、$P(x,y)$ を $y = x+1$ と解釈する構造 $\mathcal{A}$ を考える。
   すると、いずれの整数 n のそれぞれに対し、それより 1 つ大きな n' が必ず存在するので、$\mathcal{A} \models \forall x \exists y P(x,y)$。
   しかし、すべての整数より 1 大きな数は存在しない。
   よって
   $$\mathcal{A} \not\models \exists y \forall x P(x,y)$$
2. $\exists x \forall y P(x,y) \supset \forall y \exists x P(x,y)$ に対する証明図を以下のように与えることができるので、健全性の定理により恒真である。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x,y) \to P(x,y)}{P(x,y) \to \exists x P(x,y)}\ (\exists\ \text{右})}{\forall y P(x,y) \to \exists x P(x,y)}\ (\forall\ \text{左})}{\forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)}\ (\forall\ \text{右})}{\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)}\ (\exists\ \text{左})}{\to \exists x \forall y P(x,y) \supset \forall y \exists x P(x,y)}\ (\supset\ \text{右})
$$

問題 6

1. 対象領域を整数全体の集合とし、述語 R を、整数の比較演算子 $<$ と解釈する構造 $\mathcal{A}$ を考えると、A の各部分論理式は以下のように正しい。
   - $\forall x \neg R(x,y)$ は $x < x = f$ より正しい。
   - $\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z))$ は、$x < y$ かつ $y < z$ ならば $x < z$。よって正しい。
   - $\forall x \exists y R(x,y)$ は、x を任意の整数 n ととると、$y = n+1$ とすれば $x < y$ となるので、正しい。

   よって $\mathcal{A} \models A$ である。
2. [1]A を真とする有限な構造が存在すると仮定すると、$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z)) \wedge \forall x \exists y R(x,y)$ より、その対象領域には $\forall x R(x, max)$ とする元 max が存在する。
   ここで、$\forall x \exists y R(x,y)$ より、$R(max, y)$ とする y が存在するはずである。
   しかし、$\forall x \neg R(x,x)$ より、$max \neq y$ である。すると max とは別に、max より「大きな」元が存在することになり、max の定義に矛盾する。
   よって A を真とする有限な構造は存在しない。

[1] ◯ をもらっているが、怪しい。